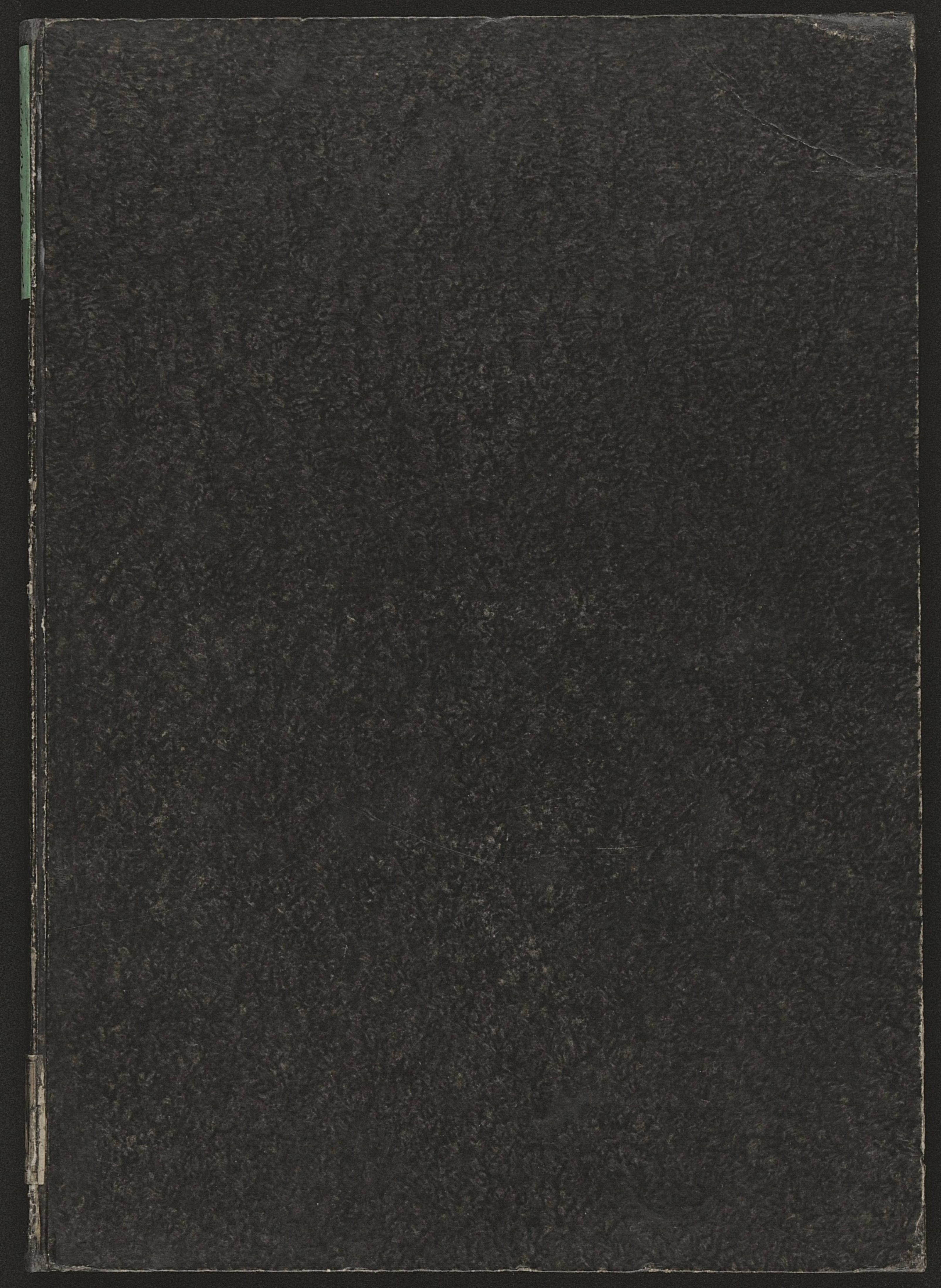


EXTRAIT DES MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE DE GENÈVE

Tome XVIII

EXPÉRIENCES FAITES A GENÈVE

AVEC

LE PENDULE A RÉVERSION

GENÈVE. — IMPRIMERIE RAMBOZ ET SCHUCHARDT.

EXPÉRIENCES

FAITES A GENÈVE

AVEC

LE PENDULE A RÉVERSION

PAR

E. PLANTAMOUR
Professeur à l'Académie de Genève.



GENÈVE ET BALE
H. GEORG, LIBRAIRE-ÉDITEUR, 10, CORRATERIE

1866

EXPÉRIENCES FAITES A GENÈVE

AVEC

LE PENDULE A RÉVERSION

INTRODUCTION

Dans une de ses premières séances, au commencement de l'année 1862, la Commission [1] géodésique suisse avait décidé de comprendre la détermination de la pesanteur effectuée dans différents points de la Suisse, au nombre des opérations qui se rattachaient à la mesure de l'arc du méridien traversant le centre de l'Europe. Il fut décidé de plus, que l'appareil qui serait employé pour cette détermination, serait le pendule à réversion, dont l'idée première revient à Bohnenberger, et sur la construction duquel Bessel a donné des indications très-précieuses dans son mémoire sur le pendule, publié dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1826. Ce n'est cependant pas avec un pendule construit d'après ce principe, mais avec un appareil tout différent, que Bessel a fait les expériences rapportées dans ce mémoire, à l'aide desquelles il a déterminé la longueur du pendule simple à Königsberg, ainsi que celles qu'il a faites quelques années plus tard à Berlin, et qui

[1] Cette commission était composée dans l'origine, en 1861, de MM. le général Dufour; le professeur Wolf, directeur de l'observatoire fédéral à Zurich; Denzler, ingénieur à Berne; Hirsch, directeur de l'observatoire de Neuchâtel, et E. Ritter, à Genève. A la mort de M. Ritter, survenue au printemps de 1862, je fus appelé à le remplacer dans la commission.

sont publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1835. L'exécution d'un pendule à réversion, construit d'après les principes indiqués par Bessel, fut confiée aux célèbres artistes de Hambourg, MM. Repsold, et comme il avait été convenu que les observations seraient faites en premier lieu à Genève, l'instrument me fut expédié dans l'automne de l'année 1864. J'ai commencé déjà à la fin de cette année, et j'ai continué au commencement de l'année suivante les expériences à l'aide desquelles on obtenait, d'une part, la distance entre les couteaux mesurée à l'aide de l'appareil micrométrique et de l'échelle, d'autre part, la durée d'une oscillation, en suspendant le pendule alternativement sur l'un et sur l'autre des deux couteaux. Dès ces premières expériences, l'accord entre les longueurs obtenues d'un jour à l'autre pour la distance des couteaux m'a montré qu'on pouvait disjoindre ces deux opérations, et qu'il était même préférable de faire séparément la détermination de la durée d'une oscillation et celle de la distance entre les couteaux, puisque celle-ci pouvait être considérée comme étant sensiblement constante, à la même température.

La durée d'une oscillation, qui est d'environ trois quarts de seconde, n'était pas déterminée par la méthode des coïncidences à l'aide d'un pendule auxiliaire servant de régulateur à une horloge, mais elle devait être déduite de l'intervalle de temps employé pour un certain nombre d'oscillations. Pour obtenir cet intervalle, ou la différence entre l'instant du commencement et celui de la fin d'une série d'oscillations, on observait dans une lunette placée à 5 $^1/_2$ mètres de distance les passages du pendule par la verticale, en donnant à l'aide d'un levier-clef un signal électrique, qui s'enregistrait sur le chronographe, au moment où un point de repère tracé sur la monture du couteau inférieur passait derrière le fil de la lunette. La moyenne de 100 passages ainsi enregistrés (c'est le nombre qui a été presque toujours employé) donnait l'instant chronographique du commencement de la série ; l'instant de la fin était obtenu également par la moyenne de 100 passages observés au bout d'un certain laps de temps, et l'on avait ainsi l'intervalle chronographique entre

le commencement et la fin, qu'il s'agissait de transformer en temps pour en déduire la durée d'une oscillation en divisant par le nombre des oscillations. J'avais cherché à déduire par quelques expériences préliminaires l'influence que pouvaient avoir les erreurs accidentelles dans l'observation du passage du pendule par la verticale et dans le signal correspondant. En réduisant avec la valeur approximative d'une oscillation chaque passage à la moyenne des 100 passages observés, j'avais trouvé par la somme des carrés des écarts, que l'erreur moyenne sur un passage était d'environ $\pm 0^s,03$ et par suite l'erreur probable d'une moyenne de 100 passages était seulement $\pm 0^s,002$. On n'avait ainsi à redouter qu'une incertitude de $\pm 0^s,0028$ sur l'intervalle compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations, déterminés chacun par la moyenne de 100 passages, en tant que cette incertitude provenait des erreurs fortuites dans l'observation des passages. Or, comme $0^s,0028$ n'est que $\frac{1}{100000}$ sur 280 secondes, j'avais cru préférable de prendre un intervalle de quelques minutes seulement entre le commencement et la fin de la série d'oscillations, puisqu'il suffisait d'un intervalle de moins de 5 minutes pour réduire à $\frac{1}{100000}$ l'influence des erreurs fortuites dans l'observation des passages, et qu'il existait d'autres causes d'erreur pouvant augmenter proportionnellement avec le temps. J'ai fait d'après cela une série complète d'expériences dans les différents modes d'ajustement des couteaux, et dans les différents modes de suspension du pendule, en prenant en moyenne entre le commencement et la fin des oscillations l'intervalle de 376 secondes employé par 500 oscillations.

La discussion de cette première série d'expériences m'a montré, d'une part, qu'il existait une différence assez notable, de $\frac{1}{5000}$ environ, dans la durée de l'oscillation, suivant que le pendule était suspendu par le couteau le plus rapproché, ou par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, d'autre part, que les différentes valeurs obtenues d'un jour à l'autre pour la durée d'une oscillation, dans le même mode de suspension, présentaient des écarts bien plus considérables que ceux qui pouvaient provenir des erreurs fortuites dans l'observation des passages du

pendule par la verticale. En effet, tandis que l'incertitude due à cette cause ne s'élevait qu'à $\pm 0^s,0028$ sur l'intervalle compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations, il résultait des écarts entre les chiffres obtenus pour la durée d'une oscillation, que l'incertitude sur l'intervalle s'élevait en réalité à $\pm 0^s,012$. Cette incertitude correspond à $\frac{1}{31000}$ de l'intervalle de 576 secondes employé pour 500 oscillations, elle s'élève ainsi à une fraction beaucoup plus considérable que celle qui peut être admise dans des recherches de cette nature. Il importait donc de chercher quelles pouvaient être les causes de cette incertitude, et si elle resterait la même, ou à peu près, lors même que l'intervalle de temps compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations serait considérablement augmenté, ce qui diminuait naturellement dans la même proportion la fraction représentant l'incertitude.

La nécessité de modifier le système d'observation, en vue d'obtenir la durée d'une oscillation avec une plus grande précision, était surtout commandée par le fait, que la durée d'une oscillation n'était pas la même, suivant que le pendule était suspendu par l'un, ou par l'autre des deux couteaux. En effet, d'après la théorie du pendule à réversion, la distance entre les deux couteaux n'est égale à la longueur du pendule simple effectuant dans le vide une oscillation dans le même temps que la durée observée dans l'air, qu'autant que cette durée observée est exactement la même, le pendule étant suspendu par l'un, ou par l'autre des couteaux. Bessel indiquait dans son mémoire, que cette égalité pouvait être obtenue, approximativement du moins, en déplaçant l'un ou l'autre des disques placés aux deux extrémités de la tige du pendule, et dont l'un est plein et l'autre creux ; en faisant ainsi varier la distance du centre de gravité relativement à chacun des couteaux, on pouvait arriver par tâtonnement à obtenir approximativement la même durée d'oscillation dans les deux modes de suspension. L'appareil construit par Repsold est disposé de manière à permettre d'effectuer cette correction en déplaçant l'un ou l'autre des disques, mais ce n'est pas la méthode que j'ai suivie. En effet, cette méthode de correction de la position du centre de gravité relative-

ment aux couteaux, par voie de tâtonnement, aurait nécessité une longue série d'essais, qui auraient donné des résultats complétement inutiles, jusqu'à ce que l'on fût parvenu à obtenir dans les deux modes de suspension une durée d'oscillation égale, ou ne différant du moins que d'une quantité comprise dans les limites de l'exactitude des observations. Il aurait été de plus très-difficile d'arriver par ce moyen à une approximation suffisante, lors même que l'erreur des observations aurait été réduite autant qu'on peut l'espérer, c'est-à-dire à $\pm 0^s,000005$ sur la durée d'une oscillation, soit $\frac{1}{150000}$; cela suppose effectivement, qu'un intervalle de 2130 secondes, tel que celui qui serait employé par un peu plus de 2800 oscillations, serait soumis à une incertitude de $\pm 0^s,014$ seulement. Même dans ce cas, les limites dans lesquelles on pourrait affirmer que la durée d'oscillation est approximativement la même dans les deux modes de suspension, sont de $\pm 0^s,0000071$, soit de $\frac{1}{100000}$ environ; or, il s'en faut de beaucoup que, dans ces limites d'approximation, la distance entre les couteaux puisse être prise comme étant la longueur du pendule simple effectuant dans le vide une oscillation dans le même temps que la durée observée; l'erreur pourrait s'élever à $0^l,006$ ou à $0^l,012$, suivant que l'on prendrait l'un ou l'autre des deux modes de suspension.

La méthode que j'ai suivie m'a été suggérée par M. Ch. Cellérier, qui a bien voulu me communiquer ses recherches sur le pendule, qu'il a publiées dans le Tome XVIII des *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève.* Dans le § 5 de son Mémoire, dans lequel il s'occupe du pendule à réversion, M. Cellérier montre que, lors même que les durées observées t et t' d'une oscillation, suivant que le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché, et par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, ne sont pas égales, mais la quantité $\frac{t-t'}{t}$ étant assez petite pour qu'on puisse négliger les termes de l'ordre du carré, l'on peut déduire de ces durées la longueur du pendule simple. Seulement, ce n'est pas la distance directement mesurée entre les deux couteaux, qui est égale à la longueur du pendule simple effectuant dans

le vide une oscillation dans le même temps que la durée observée, mais cette distance, augmentée d'une correction qui dépend de $\frac{t-t'}{t}$, et de la distance qui sépare le centre de gravité de l'appareil du centre de figure, ou du milieu de l'intervalle entre les deux couteaux. La correction n'est pas la même, suivant que le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché, ou par le couteau le plus éloigné du centre de gravité; dans le premier cas, elle a pour facteur la distance du centre de gravité au couteau le plus éloigné, et, dans le second cas, la distance au couteau le plus rapproché.

Sans entrer dans plus de détails sur la théorie de l'instrument et sur la méthode, qui a pour but de déterminer les corrections devant être apportées aux observations et aux mesures, au lieu de corriger l'instrument lui-même, détails que l'on trouvera dans le mémoire de M. Cellérier, je ferai remarquer que la fraction $\frac{1}{5000}$ environ, obtenue dans mes premières expériences pour la valeur de $\frac{t-t'}{t}$, est assez petite pour que son carré puisse être négligé, et qu'il fût inutile de chercher à la réduire encore, en déplaçant l'un des disques pour modifier la distance du centre de gravité à chacun des couteaux. Il importait seulement de déterminer ces distances avec la plus grande exactitude possible, puisqu'elles servent à calculer les corrections qui doivent être apportées à la longueur mesurée; cette détermination exigeait un appareil spécial, pour lequel je me suis adressé à MM. Repsold, qui m'ont soumis un projet d'exécution accompagné d'un dessin. Ce projet ayant été approuvé, il a été exécuté, et l'appareil, dont on trouvera plus loin la description, m'a été envoyé dans les derniers jours de l'année 1865; les expériences ont montré qu'il remplissait parfaitement le but que l'on avait en vue.

Il restait enfin à chercher, si en modifiant le mode d'observation par lequel la durée d'une oscillation était obtenue, c'est-à-dire en augmentant considérablement l'intervalle compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations, l'exactitude devenait plus grande. Si les causes d'erreur qui affectent la détermination de cet intervalle sont de

nature à augmenter avec le temps dans une proportion notable, il y aurait évidemment peu d'avantage à opérer sur un intervalle long, plutôt que sur un intervalle court; mais il n'en est pas de même, si les causes d'erreur affectent de la même quantité, à peu près, un intervalle de temps obtenu chronographiquement, qu'il soit de quelques minutes seulement, ou beaucoup plus long. J'ai fait par conséquent une nouvelle série d'expériences, dans lesquelles la durée d'une oscillation était déduite de celle de 2828 oscillations; le commencement et la fin de chaque série étaient déterminés, comme précédemment, par la moyenne de 100 passages observés du pendule par la verticale, seulement ces deux instants étaient séparés par un intervalle de 2130 secondes, au lieu de 376, comme dans mes premières expériences. La discussion de ces nouvelles observations m'a montré que l'incertitude sur un intervalle de 2130 secondes n'était que de $\pm 0^s,014$, c'est-à-dire très-peu supérieure à celle que j'avais trouvée pour un intervalle de 376 secondes; seulement, dans ce cas, la fraction qui représente l'incertitude est de $\frac{1}{150000}$.

Cette nouvelle série d'expériences, qui s'est prolongée jusque vers la fin de l'hiver dernier, suffit pour donner avec la précision voulue la durée d'une oscillation dans les différents modes de suspension du pendule, et dans les différents modes d'ajustement des couteaux. Il ne m'est cependant pas possible de donner dès à présent le résultat définitif de ces expériences, c'est-à-dire la longueur du pendule simple effectuant dans le vide une oscillation dans une seconde de temps moyen, et, par suite, l'intensité de la pesanteur à Genève; je ne peux donner qu'un résultat provisoire et susceptible de quelques modifications, lorsque les recherches destinées à faire connaître quelques données instrumentales relatives à l'appareil auront été terminées. Ces données sont : la longueur absolue de l'échelle, qui sert à mesurer l'intervalle entre les couteaux, et sa comparaison avec un étalon connu; le coefficient de dilatation de la tige du pendule et celui de l'échelle. MM. Repsold, auxquels nous nous étions adressés pour avoir l'équation de l'échelle qu'ils avaient livrée avec l'instrument, nous ont répondu qu'il leur était impossible de

nous fournir la comparaison demandée avec l'un des étalons authentiques, comme la toise de Schumacher, ou celle de Bessel. Mais nous avons obtenu d'un autre côté de Son Exc. M. le général Baeyer l'assurance, que la comparaison avec la toise de Bessel pourrait être faite à Berlin, où l'échelle sera envoyée dans le courant de l'automne prochain. Lorsque nous aurons ainsi obtenu la correction $\pm c$ qu'il faut apporter à la longueur absolue de l'échelle, du trait 0 au trait $248^{l},5$, pour avoir sa véritable longueur à 16° 1/4 centigr., il suffira d'appliquer la correction $\pm 1{,}772 \times c$ au chiffre obtenu pour la longueur du pendule simple faisant une oscillation dans une seconde de temps moyen.

Nous n'avons également pu obtenir de MM. Repsold aucun renseignement sur le coefficient de dilatation du pendule et de l'échelle, ni même sur la composition de l'alliage, dont sont formés ces deux objets, ce qui aurait pu guider dans le choix du coefficient de dilatation.

La question de l'inégalité du coefficient de dilatation de l'échelle et du pendule se présente dans les mesures de la distance entre les couteaux faites à différentes températures; cette inégalité peut être, il est vrai, déduite des mesures elles-mêmes par la condition, que la somme des carrés des écarts entre les mesures faites à différentes températures soit réduite à un minimum. C'est ce que j'ai essayé de faire, j'ai trouvé ainsi que le coefficient de dilatation du pendule était plus grand que celui de l'échelle de 0,0000009, soit de $^{1}/_{21}$ environ; cette différence étant affectée d'une incertitude égale à un peu plus d'un septième de sa valeur. Le coefficient de dilatation du pendule entre comme une donnée importante dans le calcul des observations, pour réduire la durée de l'oscillation observée à une certaine température, à celle que l'on aurait eue à 16° $^{1}/_{4}$, température à laquelle une échelle divisée en pouces et lignes de Paris doit avoir sa longueur normale. A défaut de toute indication, qui pût me guider dans le choix à faire parmi les nombreuses déterminations du coefficient de dilatation des différentes espèces de laiton, j'avais pris pour commencer le chiffre de Lavoisier et Laplace, 0,00001878, puis j'ai cherché la correction qu'il fallait appliquer à ce

chiffre, pour réduire à un minimum la somme des carrés des écarts entre les durées d'une oscillation observée à différentes températures. Je suis parvenu ainsi à un nombre passablement plus élevé pour le coefficient de dilatation, savoir, 0,00002007 avec une incertitude de $\pm 0{,}00000034$, soit de $^1/_{60}$ environ.

Il me paraît hors de doute qu'une détermination directe du coefficient de dilatation de l'échelle et du pendule doit faire connaître ces données instrumentales avec une approximation plus grande que celle à laquelle on peut atteindre par le procédé indirect, fourni par les observations et les mesures elles-mêmes. On peut craindre, en effet, dans le résultat obtenu par le procédé indirect, l'influence de bien des causes d'erreur que l'on n'a pas à redouter dans la détermination directe, sans compter qu'il importe de diminuer autant que possible le nombre des inconnues qui entrent dans la solution d'un problème, et d'en éliminer en particulier celles qui peuvent être obtenues d'une autre manière avec une approximation égale, ou supérieure, comme c'est le cas pour les données instrumentales dont il s'agit. Telle est la raison pour laquelle le résultat publié dans ce mémoire ne peut être considéré encore que comme provisoire, et non définitif. A défaut d'une détermination directe, j'ai bien été obligé de faire entrer le coefficient de dilatation du pendule et celui de l'échelle comme des inconnues dans la solution du problème; mais dès que ces données instrumentales auront été déterminées directement avec une approximation suffisante, les calculs de réduction devront être repris avec ces nouvelles valeurs, ce qui pourra amener une modification, très-légère à la vérité, dans le résultat obtenu. J'espère que les expériences relatives à la détermination de ces données instrumentales pourront être faites dans le courant de l'année, à Berne, à l'aide du comparateur récemment installé dans le bureau de contrôle des poids et mesures.

CHAPITRE I.

Description des appareils.

§ 1.

Pendule à réversion.

L'appareil du pendule est représenté en entier sur les deux figures de la planche I, à l'échelle de $^1/_5$ de la grandeur naturelle, la figure 1 donnant une vue de face, c'est-à-dire perpendiculairement au plan d'oscillation, et la figure 2 une vue de côté, c'est-à-dire prise dans le plan d'oscillation. La planche II représente en grandeur naturelle quelques parties de l'appareil, savoir les figures 3 et 5 une vue de face et une vue de côté de la partie supérieure du pendule et du plan de suspension; la figure 4 une vue prise d'en haut de la partie supérieure de l'appareil et du plan de suspension, après avoir enlevé le pendule, et la figure 6 une vue prise d'en haut du pendule lui-même, après avoir enlevé le disque près de l'extrémité de la tige.

Le pendule P se compose d'une tige cylindrique en laiton, de 7 lignes de diamètre, portant près des deux extrémités deux disques M et M', d'égale dimension, dont l'un est plein et l'autre creux. Près de chacun de ces disques, la tige s'ouvre en forme de boucle, B B', fig. 3, pour laisser la place aux couteaux dont les tranchants sont parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de la tige, le pendule étant ainsi parfaitement symétrique de part et d'autre du milieu de la tige, qui est le centre de figure. Les couteaux sont en acier trempé; ils sont fixés dans leurs montures à l'aide des vis V, V, fig. 5 et 6, et les ressorts R, R, qui appuient les couteaux contre les coussins T, T, servent à les maintenir dans la même direction lorsqu'on les remet en place. Les couteaux peuvent être effectivement ajustés de différentes manières dans leurs montures, soit que l'on retourne chaque couteau bout à bout dans sa monture, soit que l'on

place alternativement chaque couteau dans l'une ou dans l'autre des montures. Cette disposition permet d'éliminer les petites erreurs qui pourraient résulter d'une petite inégalité dans la forme des couteaux, et d'un défaut de parallélisme des tranchants. Il en résulte quatre combinaisons différentes dans l'ajustement des couteaux, que j'ai désignées dans la suite du mémoire par les initiales A, B, C et D, et que l'on peut distinguer les unes des autres à l'aide des marques . et . ., qui sont tracées à l'une des extrémités des couteaux et de leurs montures. Celle des montures, qui est la plus rapprochée du disque creux, porte à l'une de ses extrémités la marque . et à l'autre extrémité l'inscription du nom du fabricant; l'autre monture, celle qui est la plus rapprochée du disque plein, porte d'un côté la marque . . Voici maintenant dans les différents modes d'ajustement la position relative des marques sur les couteaux et sur leurs montures :

Ajustement A	La marque . du couteau correspond à la marque . de la monture. La marque . . » » » » . . » »
Ajustement B	Les couteaux sont retournés bout à bout, chacun dans sa monture, en sorte que les marques correspondantes se trouvent à des extrémités opposées.
Ajustement C	Les couteaux sont échangés dans leurs montures, de telle façon que les marques sur les couteaux et sur les montures se trouvent à des extrémités opposées.
Ajustement D	La marque . du couteau correspond à la marque . . de la monture. La marque . . » » » » . » »

Lorsque le pendule n'est pas en observation, il peut être soulevé audessus du plan de suspension sur les fourchettes F, F, figure 5; ces fourchettes reposent par l'intermédiaire de ressorts sur une tige Z, qui peut être élevée, ou abaissée, au moyen de la vis E. Cette disposition permet, en outre, de mesurer l'écrasement des couteaux provenant du poids du pendule; à cet effet, le pendule étant suspendu sur les fourchettes F, F, on l'abaisse par le moyen de la vis E jusqu'à ce que le tranchant du couteau soit presque en contact avec le plan de suspension, de manière à ne laisser apercevoir entre eux qu'un très-mince filet de lumière. En plaçant alors sur le disque supérieur M un petit poids additionnel,

le pendule est légèrement abaissé par la flexion des ressorts, de façon à ce que le filet de lumière disparaisse et que le tranchant du couteau soit en contact avec le plan de suspension. On lit sur le microscope inférieur la division correspondante au tranchant du couteau inférieur, puis on abaisse complétement la fourchette à l'aide de la vis E, de telle sorte que le pendule repose de tout son poids sur le tranchant du couteau supérieur, et on fait une seconde lecture du microscope inférieur sur le tranchant du couteau inférieur. Si le poids du pendule reposant sur le couteau supérieur produit une altération de sa forme, ou un écrasement, le tranchant du couteau inférieur sera à un niveau plus bas dans la seconde observation que dans la première, ce qui sera indiqué par la différence entre les deux lectures.

Le plan de suspension, qui est également en acier trempé, est représenté vu d'en haut dans la figure 4; les arêtes de la face supérieure sont rabattues en forme de bizeau, comme on peut le voir dans les figures 3 et 4. Il présente au milieu une gorge, ou rainure transversale, G, G, figures 4 et 5, qui permet de faire l'observation du tranchant du couteau supérieur. Des ouvertures correspondantes sont pratiquées dans les deux côtés de la boucle formée par la tige du pendule; en plaçant un petit réflecteur près de l'ouverture opposée au microscope, on voit alors le tranchant du couteau supérieur se détacher en noir sur le champ blanc du réflecteur. Si l'on veut, au contraire, faire l'observation en éclairant le couteau, on insinue par cette ouverture un très-petit réflecteur qui éclaire la face du couteau tournée vers le microscope, en sorte que l'on voit le tranchant éclairé se détachant sur un fonds obscur. Malheureusement, l'excessive petitesse de ce réflecteur et sa position, qui ne laisse arriver que difficilement la lumière diffuse du jour et s'oppose à un éclairage artificiel, rendent ces observations assez peu faciles, et même, dans une salle très-claire, je ne pouvais les faire que par un temps découvert, et en hiver au milieu du jour. Il serait certainement à désirer que cette rainure pût être agrandie, de manière à permettre le passage d'un réflecteur plus grand. Pour le couteau inférieur, cette dif-

ficulté ne se rencontre pas, parce qu'un réflecteur d'une dimension suffisante peut être placé sur le tranchant du couteau, que l'on voit se détacher sur le champ noir placé devant l'ouverture de la boucle opposée au microscope; pour l'observation du couteau obscur, on remplace ce champ noir par le réflecteur blanc, qui se trouve sur l'autre face, et on place sur le tranchant du couteau un capuchon pour l'obscurcir.

Le comparateur, ou porte-microscopes D, est représenté dans les figures 1 et 2; il est retenu dans sa partie supérieure par la bride A, qui est assujettie au plateau supérieur H, figure 4; l'extrémité inférieure se termine par un pivot, qui entre dans une douille fixée au plateau inférieur, le comparateur peut ainsi tourner autour d'un axe que l'on rend vertical à l'aide des vis de correction qui servent à ajuster la position de la douille. Le niveau, qui sert à vérifier la verticalité de l'axe, peut être placé soit sur le microscope supérieur, soit sur le microscope inferieur, et les microscopes sont munis de vis de correction pour les ajuster perpendiculairement à l'axe du comparateur. La vis I, figure 1, permet d'élever, ou d'abaisser un peu le comparateur, de façon à ce que le tranchant du couteau inférieur soit à peu près au milieu du champ du microscope inférieur; le microscope supérieur seul peut être également élevé ou abaissé à l'aide d'une vis S, figure 1, pour que le tranchant du couteau supérieur soit aussi approximativement au milieu du champ.

L'ajustement de l'échelle L, figures 1 et 2, est tout à fait semblable à celui du comparateur, la vis I′ permet de l'élever, ou de l'abaisser un peu, pour que le trait 0 de l'échelle soit à peu près au même niveau que le tranchant du couteau inférieur. La bride A′, qui retient l'extrémité supérieure, est fixée au plateau supérieur par l'intermédiaire de la pièce coudée N, figures 4 et 5; les vis U et U′ permettent de donner à cette bride A′ un petit mouvement dans un plan horizontal, pour éloigner, ou rapprocher l'extrémité supérieure de l'échelle de l'axe du comparateur. Lorsque la distance focale du microscope supérieur aura été ajustée sur le tranchant du couteau supérieur, on peut, par ce moyen, amener les divisions de l'échelle à être également au foyer. L'échelle est également

mobile autour d'un axe que l'on peut rendre vertical à l'aide des vis de correction; l'extrémité supérieure de l'échelle se termine par un pivot sur lequel on peut ajuster une pièce, entrant à frottement juste, qui porte le niveau. A la hauteur du microscope supérieur, les divisions ne sont tracées sur l'échelle que sur une longueur d'un peu plus d'un pouce; elles donnent immédiatement le dixième de ligne, mesure de Paris; à la hauteur du microscope inférieur, il ne se trouve qu'un seul trait tracé sur l'échelle, le 0 de la division. La position exacte du tranchant du couteau inférieur relativement au trait 0 de la division, ainsi que celle du tranchant du couteau supérieur relativement aux deux traits de la division, entre lesquels il est compris ($248^l,4$ et $248^l,5$, la distance entre les couteaux étant un peu au-dessous de $248^l,5$), sont données par la lecture des microscopes, en faisant tourner le comparateur d'un angle de 51° autour de son axe, pour le diriger alternativement sur le pendule et sur l'échelle.

Chacun des microscopes porte deux fils horizontaux parallèles, mobiles à l'aide d'une vis micrométrique; l'intervalle entre ces deux fils est un peu plus grand que l'épaisseur d'un trait de la division de l'échelle; le tambour de chacune des vis micrométriques est divisé en 100 parties, et il faut environ quatre révolutions pour un dixième de ligne. La détermination exacte de la valeur d'une partie se trouve dans le chapitre suivant; elle est sensiblement plus forte, d'un dixième environ, pour le microscope inférieur que pour le microscope supérieur. Le grossissement des microscopes est d'environ 50; l'oculaire du microscope inférieur est prismatique, parce que, dans la vision directe, l'un des pieds de l'instrument gênerait l'observation du trait 0 de l'échelle. Un fil vertical tendu au foyer de chacun des microscopes permet de ramener le comparateur exactement dans la même position en le dirigeant sur l'échelle; cette précaution est nécessaire à cause d'une petite défectuosité dans le tracé des traits, qui ne sont pas parfaitement perpendiculaires à l'axe de l'échelle, surtout le trait 0, en sorte qu'ils ne sont pas rigoureusement parallèles aux fils horizontaux, lorsque ceux-ci

ont été ajustés horizontalement sur le tranchant des couteaux. Dans les observations de mesures, l'immobilité du pendule est assurée au moyen d'une pince Q, figure 1, qui fixe l'extrémité inférieure de la tige; cette pince est susceptible d'un petit mouvement à l'aide de la vis X, afin que le pendule soit arrêté dans une position verticale. Cette position verticale est donnée par la condition, que le tranchant du couteau inférieur suit au foyer du microscope inférieur, lorsque la distance focale de ce dernier aura été ajustée sur le trait 0 de la division de l'échelle, et après avoir rectifié la verticalité de l'axe du comparateur et de l'échelle.

Dans l'observation des oscillations, l'amplitude est mesurée à l'aide d'un petit arc divisé de 10 en 10 minutes, qui s'étend de 2° de part et d'autre de la verticale; cet arc est fixé au pied de l'instrument, qui se trouve en arrière dans la figure 1, ou à droite dans la figure 2. Cette position de l'arc divisé n'est pas très-heureuse, parce qu'il est placé à une distance trop considérable, de près de 11 pouces, en arrière de l'extrémité du couteau tournée vers l'observateur. Celui-ci observe les passages devant le fil d'une lunette d'un point de repère tracé sur la monture du couteau; à moins que les dimensions de la salle permettent de placer la lunette à une distance très-considérable, on ne peut pas voir avec la netteté désirable les divisions de cet arc dans la lunette, lorsque la distance focale de celle-ci a été ajustée sur ce point de repère, ou sur la tranche antérieure du couteau. C'est en particulier ce qui m'est arrivé; comme je ne pouvais pas reculer la lunette à une distance de plus de 17 pieds du pendule, la lecture de l'amplitude ne se faisait pas sans quelque difficulté, eu égard aussi à la rapidité du mouvement, la durée d'une oscillation étant de 3/4 de seconde. Malgré cet inconvénient, en suivant l'excursion de la tranche du couteau dans plusieurs oscillations consécutives, on parvient à déterminer sur l'arc divisé la limite de l'excursion à une petite fraction près de l'intervalle entre deux divisions, autant qu'il est permis d'en juger par l'accord des observations faites sur le décroissement de l'amplitude.

§ 2.

L'appareil destiné à déterminer la position du centre de gravité du pendule est représenté sur la planche III à l'échelle de moitié de la grandeur naturelle, la figure 1 donnant une vue d'en haut, la figure 2 une vue de face, et la figure 3 une section transversale. L'axe, ou le couteau, sur lequel le pendule doit être mis en équilibre, est formé par un double cône tronqué C, figures 1 et 3; ce double cône est susceptible d'un mouvement de rotation autour de son axe, à l'aide de la roue à molettes M, figures 1 et 2, fixée à l'une des extrémités, ce qui permet de faire avancer le pendule vers la droite ou vers la gauche d'un mouvement presque imperceptible, jusqu'à ce que l'on ait réussi à obtenir l'équilibre, et que le pendule ne penche ni d'un côté, ni de l'autre. Les fourchettes F F′, figures 1 et 2, servent à retenir le pendule et à l'empêcher de basculer complétement, lorsqu'il n'est pas encore en équilibre. La pièce, sur laquelle le pendule doit être mis en équilibre, est mobile sur une coulisse le long d'une règle R, figure 1, divisée en pouces et lignes de Paris, et elle peut être fixée à cette règle par le moyen de la vis U, figures 2 et 3, lorsqu'elle a été amenée à la position voulue. Le vernier V′ permet de déterminer exactement la division de la règle correspondant à la position dans laquelle la pièce a été fixée. La règle porte à l'une de ses extrémités une coulisse, à laquelle on peut donner un petit mouvement, dans le sens de la règle, au moyen de la vis X; cette coulisse est terminée à l'une de ses extrémités par une languette L, figures 1 et 2, que l'on amène, au moyen de la vis X, à affleurer le tranchant d'un des couteaux du pendule, lorsque celui-ci a été mis en équilibre. L'autre extrémité de la coulisse porte un vernier V, figure 1, qui sert à déterminer la division de la règle correspondant à la position de la languette. La longueur sur la règle donnée par la différence de la lecture des verniers V′ et V est égale à la distance du centre de gravité du pendule au couteau affleuré par la languette, moins une certaine lon-

gueur constante x, qui est égale à la somme des distances qui séparent d'un côté le zéro du vernier V de l'extrémité de la languette, d'un autre côté, le zéro du vernier V′ de l'axe du double cône tronqué, sur lequel le pendule a été mis en équilibre. Cette première observation faite, dans laquelle, suivant la figure, c'était le couteau le plus rapproché du disque plein qui était en contact avec la languette, le pendule est retourné pour faire la seconde observation, dans laquelle c'est le couteau le plus rapproché du disque creux, qui est mis en contact avec la languette. Pour cela, il faut desserrer la vis U et faire avancer la pièce, sur laquelle le pendule est mis en équilibre, de près de 75 lignes le long de la règle à laquelle elle est de nouveau fixée. L'équilibre exact du pendule dans cette nouvelle position ayant été obtenu à l'aide de la roue à molettes, la languette est amenée à affleurer le tranchant du couteau. La longueur sur la règle donnée par la différence de la lecture des deux verniers est maintenant égale à la distance du centre de gravité du pendule au couteau le plus éloigné, moins la même longueur constante x. L'on obtient ainsi la différence entre la distance du centre de gravité au couteau le plus éloigné et au couteau le plus rapproché, soit le double de la distance du centre de gravité au centre de figure; la distance entre les deux couteaux étant connue, on en déduit, par suite, celle du centre de gravité à chacun des couteaux.

Quant aux autres appareils que j'ai employés dans les observations de la durée d'une oscillation, le chronographe sur lequel les passages du pendule par la verticale étaient enregistrés, l'interrupteur par l'intermédiaire duquel la pendule auxiliaire trace les secondes sur la bande de papier, je peux me borner à les mentionner; ces appareils ont été en effet décrits en détail dans le mémoire sur la détermination télégraphique de la différence de longitude entre les observatoires de Genève et de Neuchâtel, qui a été publié par M. A. Hirsch et par moi. J'ajouterai seulement que l'instrument, qui servait à l'observation des passages du pendule par la verticale, est un théodolithe de Meyerstein, dont la lunette a 15 lignes de Paris d'ouverture et dont le grossissement est de 37 fois.

Le plan d'oscillation coïncidait presque exactement avec le méridien, et le théodolithe était placé à l'Est du pendule, à une distance de 5 1/2 mètres.

CHAPITRE II.

Des mesures.

§ 3.

Mesures de la distance des couteaux.

La rectification de l'appareil nécessite les opérations suivantes qui étaient faites avant de commencer les mesures. L'horizontalité du plan de suspension était vérifiée avant de suspendre le pendule, et, s'il y avait lieu, la correction nécessaire était faite à l'aide des vis calantes sur lesquelles l'instrument repose; un petit niveau, qui peut être placé dans tous les sens sur le plan de suspension, sert à cette vérification. Puis l'on vérifiait la verticalité du comparateur en plaçant le niveau soit sur le microscope supérieur, soit sur le microscope inférieur, et en s'assurant qu'en tournant le comparateur dans tous les sens l'inclinaison des microscopes restait la même, à une petite fraction près, d'une partie du niveau. Le microscope supérieur était ensuite ajusté de façon à ce que le tranchant du couteau supérieur fût au foyer, puis le comparateur était tourné sur l'échelle, et la partie supérieure de celle-ci était amenée à être au foyer du microscope supérieur. La verticalité de l'échelle était ensuite vérifiée et rectifiée, puis l'on ajustait le microscope inférieur, de telle façon que le trait 0 de l'échelle fût au foyer; enfin, après avoir ramené le comparateur sur le pendule, l'on amenait le tranchant du couteau inférieur à être au foyer du microscope inférieur, à l'aide de la vis de rappel qui fait mouvoir la pince dans laquelle l'extrémité inférieure du pendule est assujettie pendant les mesures.

Lorsque toutes ces opérations préliminaires étaient terminées, on ne procédait aux mesures elles-mêmes qu'au bout d'un intervalle de trois quarts d'heure à une heure, afin de laisser aux différentes parties de l'appareil le temps de se mettre en équilibre de température avec l'air ambiant. Les mesures elles-mêmes étaient faites dans l'ordre suivant : le comparateur était tourné sur le pendule, et il était fait quatre lectures du microscope supérieur en amenant le tranchant du couteau supérieur à bissecter l'espace compris entre les deux fils parallèles du micromètre ; dans cette première mesure, les couteaux étaient obscurs et se détachaient en noir sur un champ éclairé. Puis le comparateur étant tourné sur l'échelle, il était fait quatre lectures du microscope sur le trait $248^l,4$ et le même nombre sur le trait $248^l,5$, ensuite le comparateur était de nouveau tourné sur le pendule, et il était fait encore quatre lectures du microscope sur le tranchant du couteau supérieur. Après cela, les mesures étaient faites dans le même ordre, et avec le nombre de lectures, en dirigeant le microscope inférieur successivement sur le tranchant du couteau inférieur, sur le trait 0 de l'échelle, et de nouveau sur le tranchant du couteau inférieur. On plaçait ensuite les réflecteurs destinés à éclairer le tranchant des deux couteaux, et la même série d'opérations était faite, dans le même ordre, sur les couteaux éclairés se détachant sur un champ obscur. Dans la seconde détermination du 24 janvier, du 22 février et du 19 mars 1865, la mesure a été faite sur les couteaux éclairés avant de faire celle sur les couteaux obscurs, mais dans toutes les autres c'est par celle sur les couteaux obscurs que l'on a commencé. Dans les trois premières déterminations, celles du 20 et du 22 novembre 1864, l'ordre a été un peu différent en ce que la lecture du microscope supérieur était faite d'abord sur les traits $248^l,4$ et $248^l,5$ de l'échelle, puis sur le tranchant du couteau, puis de nouveau sur les mêmes traits de l'échelle, et celle du microscope inférieur dans un ordre analogue. Sauf pour ces trois premières déterminations, j'ai toujours suivi l'ordre qui a été d'abord indiqué, parce que j'ai reconnu que l'on amenait avec une plus grande exactitude un trait de l'échelle entre

les deux fils parallèles du microscope, que cela ne pouvait avoir lieu pour le tranchant du couteau. Celui-ci se présente bien dans le microscope comme une ligne parfaitement régulière, qui, pour le couteau obscur, se détache avec une grande netteté sur le champ éclairé, mais alors on ne voit bien que l'un des deux fils, celui qui se détache sur le fond éclairé. L'autre, qui se projette sur la face obscure du couteau, se voit beaucoup moins bien, ce qui ajoute encore à la difficulté d'apprécier exactement l'égalité de deux intervalles, dont l'un est sombre et l'autre éclairé. Il m'a paru préférable, pour cette raison, d'adopter un mode de procéder par lequel c'était le nombre de lectures faites sur le tranchant des couteaux qui fût augmenté. On comprend du reste facilement la nécessité de faire, ou bien une double observation des traits de l'échelle avant et après celle du tranchant du couteau, ou bien une double observation du tranchant du couteau avant et après celle de l'échelle; c'est en effet le seul moyen d'éliminer autant que possible les erreurs qui peuvent provenir d'une inégalité de dilatation de l'échelle, du pendule, ou du comparateur, pendant le temps qui s'écoule entre l'observation du couteau et celle de l'échelle.

Ayant obtenu de cette façon, soit pour les couteaux obscurs, soit pour les couteaux éclairés, la distance qui sépare le tranchant du couteau supérieur des traits $248^{l},4$ et $248^{l},5$ et celle qui sépare le tranchant du couteau inférieur du trait 0 de l'échelle, ces distances étant exprimées en révolutions des deux vis micrométriques, il restait à les transformer en fraction de ligne. Pour le microscope supérieur, la valeur d'une partie de la vis micrométrique pouvait être fournie directement par la différence entre la lecture du trait $248^{l},4$ et celle du trait $248^{l},5$, qui étaient faites à chaque observation; j'ai fait néanmoins une série spéciale de mesures en vue de déterminer cette valeur. Mais pour le microscope inférieur, la valeur d'une partie de la vis micrométrique ne pouvait être déterminée qu'en le mettant à la place du microscope supérieur, afin de mesurer le nombre de parties compris entre deux traits consécutifs de l'échelle. Il est fort à regretter que

M. Repsold n'ait pas tracé de chaque côté du 0 de l'échelle un trait à la distance d'un dixième de ligne; l'exactitude des mesures aurait été certainement augmentée, si l'on avait pu, dans chaque observation, comparer la position du tranchant du couteau inférieur au trait 0 de l'échelle et à celui du dixième de ligne entre lesquels il est compris. Une pareille disposition aurait permis en outre d'effectuer la détermination de la valeur d'une partie du microscope inférieur sans qu'il fût nécessaire de mettre celui-ci à la place du microscope supérieur. Ce n'est qu'après avoir terminé toutes les autres expériences que j'ai effectué cette transposition; je donne dans le tableau suivant le détail des mesures faites en vue de déterminer la valeur d'une partie de chaque microscope, ce tableau pouvant offrir quelque intérêt parce qu'il donne un moyen d'apprécier l'inégalité de dilatation du comparateur et de l'échelle qui résulte de la proximité du corps de l'observateur, et de son influence sur la température. Dans chaque série d'expériences, on faisait alternativement trois lectures sur l'un des traits et trois lectures sur l'autre, et ainsi de suite, en finissant par celui par lequel on avait commencé, et en commençant dans les différentes séries, tantôt par l'un, tantôt par l'autre.

(*Voir le tableau ci-derrière.*)

Il résulte des chiffres de ce tableau pour le nombre de parties correspondant à un dixième de ligne :

Microscope supérieur.		*Microscope inférieur.*	
1re série	$0^l,1 = 402\overset{p}{,}21$	1re série	$0^l,1 = 363\overset{p}{,}43$
2me »	402,01	2me »	363,37
3me »	402,57	3me »	363,59
4me »	401,70	4me »	363,36
		5me »	363,48
Moyenne	$0^l,1 = 402\overset{p}{,}12$	Moyenne	$0^l,1 = 363\overset{p}{,}446$
d'où 1 partie	$= 0^l,00024869.$	d'où 1 partie	$= 0^l,00027515.$

Détermination de la valeur d'une partie du microscope supérieur.
1866

	7 mars		7 mars		7 mars		8 mars	
	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5
	0 91,7	4 94,8	0 86,5	4 87,7	0 86,8	4 90,7	0 92,7	4 93,5
	94,0	96,5	89,3	90,5	89,8	93,7	93,2	95,2
	94,5	96,7	90,5	92,0	92,2	94,7	93,3	95,5
	94,8	96,3	91,2	93,2	93,3	96,0	93,5	95,5
	94,2	96,0	91,7	93,8	94,5	96,7	93,0	95,3
	94,2	95,8	91,8	93,8	94,3	97,0	92,2	94,3
	93,3	94,8	91,5	93,8	94,8	97,0	91,0	93,3
	92,7	94,8	91,2	93,8	94,2	96,0	90,5	92,2
	92,3	94,3	91,0	93,0	93,3	96,2	88,8	91,5
	91,8	93,8	90,7	93,0	94,0	95,8	88,5	90,7
	92,5	93,7	90,3	93,0	93,5		87,3	89,7
	90,7			92,8				89,2
Moy.	0 93,02	4 95,23	0 90,52	4 92,53	0 92,80	4 95,37	0 91,27	4 92,97

Détermination de la valeur d'une partie du microscope inférieur.
1866

	18 mars		18 mars		19 mars		19 mars		19 mars	
	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5	248l,4	248l,5
	0 16,0	3 81,2	0 19,7	3 83,0	0 39,5	4 2,7	0 8,7	3 72,3	0 54,0	4 16,5
	19,7	84,3	18,3	82,0	40,0	3,5	10,3	75,2	55,3	20,0
	20,8	83,8	18,2	81,8	38,2	3,0	12,3	76,3	56,3	20,5
	21,0	84,5	19,0	82,2	38,0	1,7	13,3	76,8	55,5	19,5
	21,5	85,0	17,5	82,3	37,0	1,2	14,2	77,2	55,0	18,3
	20,3	84,3	16,8	80,5	36,5	0,0	13,2	77,3	55,0	19,5
	21,0	84,5	17,8	80,3	35,8	0,2	14,0	76,5	55,0	18,8
	22,2	84,5	17,7	81,3	35,2	3 98,7	13,3	76,7	55,3	18,7
	22,0	85,0	16,5	80,3	35,7	98,7	14,7	77,3	54,3	18,3
	20,5	82,8	17,0	80,0	36,0	99,3	14,3	77,5	53,5	16,7
	20,3	83,0	16,3	79,5		99,6	14,5	77,0	52,3	16,3
	20,3			79,8			13,7			15,0
Moy.	0 20,47	3 83,90	0 17,71	3 81,08	0 37,19	4 0,78	0 13,02	3 76,38	0 54,70	4 18,18

C'est à l'aide de ces valeurs d'une partie de chaque microscope que les mesures ont été réduites, et que l'on a obtenu pour chaque jour la distance entre les couteaux obscurs et celle entre les couteaux éclairés, telle qu'elle est donnée dans le tableau suivant. Les mesures ont été faites dans les différents ajustements suivant lesquels on peut placer les couteaux dans leurs montures, et qui sont désignés dans la première colonne de ce tableau par les lettres A, B, C, D; elles ont été faites, en outre, pour chaque ajustement, en faisant varier le mode de suspension du pendule. Les quatre modes différents de suspension du pendule, suivant qu'il repose sur le couteau dont la monture porte le nom du fabricant, et qui correspond au disque creux le plus éloigné du centre de gravité, ou suivant qu'il repose sur l'autre couteau; suivant que le pendule est suspendu, cette inscription étant tournée vers l'est, ou vers l'ouest, sont indiqués dans la même colonne par les initiales R E haut, R O haut, R E bas, R O bas.

A la suite de la colonne qui renferme la moyenne des distances obtenues entre les couteaux obscurs et entre les couteaux éclairés, se trouve celle qui renferme la différence entre les deux déterminations. Enfin la dernière colonne renferme la température t indiquée, au milieu de l'opération, par un thermomètre suspendu au centre de l'appareil, entre l'échelle et le pendule, de telle façon que la boule fût à la même hauteur que le milieu de l'intervalle entre les deux couteaux. Il est évident que l'on n'aurait pas à se préoccuper de la température dans le cas, où on pourrait la supposer la même pour l'échelle et pour le pendule, et où on pourrait admettre le même coefficient de dilatation pour ces deux masses métalliques; mais si ces deux conditions ne se réalisent pas, et en particulier la dernière, l'indication de la température est nécessaire pour calculer la correction due à la différence du coefficient de dilatation.

Ajustement des couteaux et mode de suspension.	Date.	Distance entre les couteaux			Différence entre la distance des couteaux obscurs et des couteaux clairs	Température t
		obscurs.	clairs.	Moyenne.		
		l	l	l	l	o
A. RO bas	20 novembre 1864	248,48019	248,47923	248,47971	+0,00096	+ 7,2
A. RE bas	20 novembre »	,48206	,47834	,48020	+ 372	+ 7,4
A. RO bas	22 novembre »	,48005	,47965	,47985	+ 040	+ 8,4
A. RO haut	25 novembre »	,48135	,47969	,48052	+ 166	+ 7,6
A. RE haut	27 novembre »	,48096	,47806	,47951	+ 290	+ 7,5
A. RO haut	28 novembre »	,48125	,48021	,48073	+ 104	+ 6,8
A. RE haut	17 décembre »	,47912	,47659	,47786	+ 253	+ 5,3
A. RE bas	22 décembre »	,47818	,47909	,47863	— 091	+ 5,2
B. RE bas	18 janvier 1865	,47702	,47665	,47683	+ 037	+ 3,6
B. RO bas	18 janvier »	,47807	,47788	,47798	+ 019	+ 4,0
B. RE haut	24 janvier »	,47802	,47763	,47783	+ 039	+ 6.6
B. RO haut	24 janvier »	,47873	,47728	,47800	+ 145	+ 6,8
C. RO bas	22 février »	,47698	,47677	,47688	+ 021	+ 4,0
C. RE bas	22 février »	,47759	,47711	,47735	+ 048	+ 3,1
C. RE haut	19 mars »	,47718	,47727	,47723	— 009	+ 6,4
C. RO haut	19 mars »	,47757	,47686	,47722	+ 071	+ 6,6
D. RO haut	3 avril »	,47649	,47684	,47667	— 035	+ 7,4
D. RE bas	18 avril »	,48091	,48082	,48086	+ 009	+17,4
D. RO bas	23 avril »	,48003	,48032	,48018	— 029	+18,9
D. RE haut	24 avril »	,48088	,48089	,48088	— 001	+20,0
D. RO haut	26 avril »	,48074	,48160	,48117	— 086	+19,5
D. RE haut	18 octobre »	,48233	,48110	,48171	+ 123	+13,8
C. RE haut	9 novembre »	,48329	,48362	,48345	— 033	+10,7
B. RE haut	24 novembre »	,48260	,48067	,48163	+ 193	+13,3
B. RE haut	25 novembre »	,48115	,47967	,48041	+ 148	+12,8
B. RO haut	15 décembre »	,47942	,47904	,47923	+ 038	+ 3,3
A. RE haut	23 février 1866	,48056	,47946	,48001	+ 110	+ 8,1
A. RE bas	25 février »	,48104	,48134	,48119	— 030	+ 7,8
A. RO bas	25 février »	,48131	,48099	,48115	+ 032	+ 8,3
C. RE haut	15 mars »	,47873	,47881	,47877	— 008	+ 6,4
C. RE bas	15 mars »	,47845	,48014	,47930	— 169	+ 6,6
C. RE haut	16 mars »	,48052	,48002	,48027	+ 050	+ 7,4
	Moy. 32 mesures	248,47977.5	248,47917.5	248,47947.5	+0,00060	+ 8,7

Il résulte ainsi de la moyenne directe de ces trente-deux déterminations, que la distance entre les couteaux est de $248^{l},479475$; la moyenne de la température pour ces trente-deux mesures étant $+8^{o},7$. Si l'on prend la différence entre chacune des trente-deux déterminations et la

moyenne, on trouve par la somme des carrés des écarts que l'écart moyen est de $\pm 0^{l},00171$, ce qui donne $\pm 0^{l},00020$ pour l'erreur problable de la moyenne. Cette valeur de $\pm 0^{l},00171$ de l'écart moyen, qui correspond à 6 1/2 parties environ des microscopes, dépasse considérablement celle que l'on peut attribuer aux erreurs accidentelles dans le pointer, en amenant un trait de l'échelle, ou le tranchant de l'un des couteaux, entre les fils des microscopes. On ne peut effectivement pas évaluer à plus de une partie et demie à deux parties des microscopes l'erreur accidentelle commise sur une lecture, et comme chaque détermination repose sur plusieurs lectures faites sur les traits de l'échelle et sur le tranchant des couteaux, on peut estimer à deux parties environ, soit $0^{l},0005$, la part qui revient aux erreurs accidentelles de pointer dans l'écart moyen d'une détermination.

Si l'on cherche quelles sont les causes qui peuvent produire une erreur dans les mesures et donner lieu aux écarts observés, on peut indiquer les suivantes :

1° Défaut de verticalité de l'échelle.

2° Défaut de verticalité de l'axe du comparateur, et par suite changement dans l'inclinaison de l'axe optique des deux microscopes, suivant que le comparateur est dirigé vers le pendule, ou vers l'échelle.

3° Inégalité de dilatation de l'échelle et du pendule, provenant, soit d'une inégalité dans le réchauffement dû à la proximité du corps de l'observateur, soit d'une inégalité dans le coefficient de dilatation de ces deux objets.

4° Enfin, variations produites par la proximité de l'observateur dans l'état du comparateur entre l'observation de l'échelle et celle du pendule.

Quant à la première cause d'erreur, le défaut de verticalité de l'échelle, elle peut être facilement écartée; en effet, une inclinaison de l'échelle relativement à la verticale, s'élevant même à une minute, ne produirait sur la longueur de $248^{l},5$, qu'il s'agit de mesurer, que l'erreur insignifiante de $0^{l},00001$. Or l'erreur de verticalité de l'échelle peut être facilement réduite à une petite fraction de minute, à l'aide du niveau qui

s'adapte à l'échelle, et des vis de correction; c'est ce que l'on a toujours eu soin de faire avant de commencer les mesures.

La seconde cause d'erreur, le défaut de verticalité de l'axe du comparateur, ne peut pas non plus donner lieu à des erreurs appréciables, si du moins l'inclinaison reste constante pendant la durée des observations. Supposons, en effet, que le défaut de verticalité de l'axe du comparateur modifie d'une certaine quantité l'inclinaison de l'axe optique du microscope supérieur, suivant que le comparateur est dirigé sur le pendule, ou sur l'échelle, il modifiera de la même quantité l'inclinaison du microscope inférieur dans le mouvement de l'un à l'autre, puisque dans les deux cas on fait tourner le comparateur du même angle de 51° autour de son axe. Le couteau supérieur serait, par conséquent, porté par suite de cette erreur de la même quantité au-dessus, ou au-dessous, d'un trait de l'échelle, que le couteau inférieur au-dessus, ou au-dessous, du 0 de la division, et la distance entre les couteaux correspondrait à la même longueur sur l'échelle. Il n'en serait naturellement plus de même, si l'inclinaison de l'axe du comparateur ne restait pas constante pendant la durée des observations et si le changement d'inclinaison de l'axe optique du microscope inférieur n'est pas le même que pour le microscope supérieur, suivant que le comparateur est tourné vers le pendule, ou vers l'échelle. De pareilles variations dans l'inclinaison de l'axe optique des microscopes se produisent en réalité par l'influence du corps de l'observateur sur le comparateur, et j'ai cherché à en apprécier l'effet dans les recherches que l'on trouvera un peu plus loin sur la quatrième source d'erreur.

Une question qui se présente naturellement est celle-ci : ne serait-il pas possible, en faisant la lecture du niveau, posé alternativement sur chacun des microscopes, de déterminer directement le changement d'inclinaison de l'un et de l'autre, suivant que le comparateur est tourné vers le pendule, ou vers l'échelle? En appliquant à chaque lecture, soit du pendule, soit de l'échelle, une correction en raison de l'inclinaison du microscope, on éliminerait ainsi les erreurs causées par le change-

ment d'inclinaison. La réponse affirmative à cette question ne serait pas douteuse, si le niveau employé était assez sensible pour qu'il fût possible de déterminer l'inclinaison à une fraction de seconde près, ou même à une seconde près. En effet, à la distance de 50 lignes, dont l'axe du comparateur est distant du pendule, ou de l'échelle, une inclinaison de une seconde correspond à $0^l,00025$. En supposant ainsi, que chaque lecture du niveau pût donner l'inclinaison à une seconde près, le changement d'inclinaison du microscope, suivant qu'il est dirigé sur le pendule, ou sur l'échelle, pourrait être déterminé à $1'',4$ près, ce qui donnerait pour l'incertitude de la correction à appliquer $\pm 0^l,00035$. Dans ce cas, la lecture du niveau pourrait accuser dans l'axe optique des microscopes des variations d'inclinaison, dont les limites d'exactitude et de grandeur appréciable correspondraient sur l'échelle à une quantité du même ordre que celle que le pouvoir micrométrique peut donner.

Il n'en est pas de même avec le niveau très-peu sensible dont l'instrument est muni; la valeur angulaire d'une partie de ce niveau est de $16'',46$, et comme la longueur linéaire d'une partie est de un peu moins de $0^l,8$, il n'est guère possible de déterminer l'inclinaison à moins d'un quart de partie près, soit $4''$ environ. La lecture de ce niveau faite à chaque observation ne permettrait donc pas de constater un changement d'inclinaison inférieur à cinq ou six secondes, suivant que le comparateur est dirigé sur le pendule, ou sur l'échelle, et le changement d'inclinaison serait affecté d'une incertitude du même ordre. Or la quantité sur l'échelle, qui correspond à une inclinaison de cinq à six secondes, est de $0^l,00125$ à $0^l,00150$, c'est-à-dire, à peu près égale à l'écart moyen d'une détermination que nous avons trouvé plus haut; l'écart moyen d'une détermination est même réduit à $0^l,00134$, comme nous le verrons plus loin, si l'on tient compte de l'inégalité du coefficient de dilatation de l'échelle et du pendule. Il n'y a donc aucun avantage à faire la lecture du niveau à chaque observation, et à calculer la correction résultant du changement d'inclinaison des microscopes, puisque la limite de la quantité, que l'on peut apprécier par ce moyen,

n'est pas inférieure à l'écart moyen d'une détermination. C'est pour ce motif que je me suis abstenu de faire la lecture du niveau à chaque observation, d'autant plus, que les 24 lectures du niveau exigées pour une détermination complète auraient considérablement allongé et compliqué les mesures.

La troisième source d'erreur, l'inégalité de dilatation du pendule et de l'échelle, peut provenir de deux causes, savoir d'une différence dans la température, ou d'une différence dans le coefficient de dilatation de ces deux objets. Il est impossible de s'assurer d'une égalité complète dans la température de deux masses métalliques, à moins de les laisser dans un milieu, dont la température soit absolument constante, pendant un temps suffisamment long, pour que toutes les parties de ces masses soient effectivement à la température indiquée par le thermomètre plongé dans ce milieu. Or ces circonstances ne se réalisent pas dans les mesures de la longueur du pendule, attendu que la proximité de l'observateur introduit dans la température du milieu, où sont placés le pendule et l'échelle, de petits changements, dont la durée n'est pas assez longue pour qu'on puisse supposer qu'ils se soient propagés dans toutes les parties des masses métalliques. De plus, la position de l'observateur n'est pas la même, et par suite la distance qui le sépare du pendule, ou de l'échelle, est un peu différente, suivant que le comparateur est dirigé sur l'un ou sur l'autre de ces objets. On doit ainsi se borner à déterminer les changements de température que la proximité de l'observateur introduit dans le milieu, où sont placés le pendule et l'échelle, ce qui permet de fixer les limites entre lesquelles la différence de la température réelle des deux masses métalliques doit être comprise. J'avais suspendu dans ce but deux thermomètres, l'un à un mètre, l'autre à deux mètres de distance de celui qui était suspendu au centre de l'appareil; les boules des trois instruments étaient à la même hauteur au-dessus du sol, et à la même distance de la paroi intérieure de la salle, dirigée du nord au sud. La lecture des trois thermomètres se faisait toujours avant de commencer les mesures, puis au milieu, entre l'observation des couteaux obscurs et celle des couteaux éclairés, c'est-

à-dire au bout de 20 à 25 minutes, et à la fin de l'opération, soit au bout de 45 minutes environ. Le tableau suivant renferme, pour chaque détermination, la température t du thermomètre suspendu au centre de l'appareil, à chacun de ces trois instants, ainsi que la différence $t—t'$ et $t—t''$ entre la température accusée par ce thermomètre et par ceux qui étaient suspendus à une distance de 1 mètre et de 2 mètres.

Date.	Commencement.			Milieu.			Fin.		
	t	$t—t'$	$t—t''$	t	$t—t'$	$t—t''$	t	$t—t'$	$t—t''$
	°	°	°	°	°	°	°	°	°
20 novembre 1864	+ 7,2	—0,1	+0,1	+ 7,3	+0,3	+0,3	+ 7,1	+0,1	+0,1
20 novembre »	+ 7,2	0	0	+ 7,4	+0,3	+0,3	+ 7,4	+0,2	+0,2
22 novembre »	+ 7,6	0	+0,1	+ 8,4	+0,2	+0,3	+ 8,6	+0,2	+0,3
25 novembre »	+ 7,4	0	0	+ 7,6	+0,3	+0,3	+ 7,8	+0,5	+0,5
27 novembre »	+ 7,3	0	+0,1	+ 7,5	+0,3	+0,4	+ 7,0	+0,3	+0,3
28 novembre »	+ 6,7	+0,4	+0,4	+ 6,8	+0,5	+0,5	+ 6,7	+0,5	+0,5
17 décembre »	+ 4,9	+0,1	+0,1	+ 5,3	+0,5	+0,5	+ 5,4	+0,5	+0,6
22 décembre »	+ 4,8	0	0	+ 5,2	+0,5	+0,5	+ 5,2	+0,6	+0,6
18 janvier 1865	+ 3,1	0	+0,1	+ 3,6	+0,5	+0,5	+ 3,7	+0,4	+0,5
18 janvier »	+ 3,7	+0,1	+0,1	+ 4,0	+0,5	+0,5	+ 3,9	+0,5	+0,5
24 janvier »	+ 6,2	0	0	+ 6,6	+0,4	+0,4	+ 6,7	+0,4	+0,4
24 janvier »	+ 6,8	0	0	+ 6,8	+0,3	+0,3	+ 6,9	+0,3	+0,3
22 février »	+ 3,4	0	0	+ 4,0	+0,4	+0,4	+ 3,9	+0,5	+0,5
22 février »	+ 3,1	+0,1	+0,1	+ 3,1	+0,2	+0,2	+ 3,1	+0,3	+0,3
19 mars »	+ 5,8	0	0	+ 6,4	+0,4	+0,4	+ 6,4	+0,4	+0,4
19 mars »	+ 6,2	+0,1	+0,1	+ 6,6	+0,4	+0,4	+ 6,6	+0,4	+0,4
3 avril »	+ 7,0	+0,2	+0,2	+ 7,4	+0,5	+0,5	+ 7,4	+0,5	+0,6
18 avril »	+17,0	+0,3	+0,3	+17,4	+0,5	+0,5	+17,4	+0,5	+0,5
23 avril »	+18,6	+0,2	+0,2	+18,9	+0,5	+0,5	+19,0	+0,6	+0,6
24 avril »	+19,6	+0,2	+0,2	+20,0	+0,6	+0,6	+19,8	+0,6	+0,6
26 avril »	+19,1	+0,2	+0,2	+19,5	+0,6	+0,6	+19,4	+0,6	+0,6
18 octobre »	+13,6	+0,2	+0,3	+13,8	+0,3	+0,4	+13,8	+0,4	+0,4
9 novembre »	+10,5	+0,1	+0,1	+10,7	+0,3	+0,3	+10,8	+0,4	+0,4
24 novembre »	+12,6	+0,1	+0,1	+13,3	+0,5	+0,5	+13,5	+0,5	+0,5
25 novembre »	+12,4	+0,1	+0,1	+12,8	+0,3	+0,3	+13,0	+0,4	+0,4
15 décembre »	+ 3,2	+0,1	+0,1	+ 3,3	+0,3	+0,3	+ 3,4	+0,3	+0,3
23 février 1866	+ 7,6	0	0	+ 8,1	+0,2	+0,2	+ 8,4	+0,2	+0,3
25 février »	+ 7,2	0	0	+ 7,8	+0,2	+0,3	+ 8,0	+0,3	+0,4
25 février »	+ 7,6	0	0	+ 8,3	+0,4	+0,5	+ 8,6	+0,5	+0,6
15 mars »	+ 5,6	0	0	+ 6,4	+0,4	+0,5	+ 6,3	+0,3	+0,4
15 mars »	+ 6,4	+0,1	+0,2	+ 6,6	+0,4	+0,4	+ 6,6	+0,4	+0,5
16 mars »	+ 7,0	+0,1	+0,2	+ 7,4	+0,4	+0,5	+ 7,5	+0,6	+0,6
Moyennes. . . .	+ 8,33	+0,08	+0,10	+ 8,70	+0,39	+0,41	+ 8,73	+0,41	+0,43

La comparaison des chiffres de ce tableau montre, que les trois thermomètres étaient à peu près d'accord au commencement des opérations, puisque l'on trouve en moyenne $t-t'=+0^\circ,08$ et $t-t''=+0^\circ,10$. Cette petite différence est surtout due aux observations faites pendant des jours chauds, et peut tenir à ce que le thermomètre suspendu au centre de l'appareil était plus rapproché de la face sud de l'observatoire, exposée aux rayons du soleil, les observations ne pouvant jamais être faites que par un ciel clair, pour avoir une lumière suffisante. Entre le commencement et le milieu des opérations, le thermomètre t indique, en moyenne, une élévation de température de $+0^\circ,31$ relativement aux deux autres, et de $+0^\circ,33$ entre le commencement et la fin. Ainsi l'effet total de la proximité de l'observateur, pour élever la température du milieu où se trouvent le pendule et l'échelle, est sensiblement le même au bout de 40 à 45 minutes, qu'au bout de 20 minutes, et il s'élève en moyenne a $+0^\circ,32$, les valeurs extrêmes notées dans la série des 32 mesures étant $+0^\circ,1$ et $+0^\circ,5$. L'élévation totale de température accusée par le thermomètre pendant la durée des observations étant de 3 à 4 dixièmes de degré, il est permis de supposer que l'inégalité de température du pendule et de l'échelle n'est qu'une fraction de cette quantité. L'on ne peut pas, il est vrai, en indiquer le chiffre exact, mais il est probable qu'on ne l'évaluerait pas trop bas en le supposant de un dixième de degré; il en résulterait que l'inégalité de température du pendule et de l'échelle peut introduire dans les mesures une incertitude de $0^l,0005$ environ.

Une inégalité, même assez faible, du coefficient de dilatation du pendule et de l'échelle peut donner lieu à des différences beaucoup plus considérables entre des mesures faites à des températures différant entre elles de plusieurs degrés. En effet, une différence de 0,000001 (soit de 1/20me environ) dans le coefficient de dilatation donne pour chaque degré centigrade une différence de $0^l,0002485$ sur une longueur de $248^l,5$ comme celle du pendule, et dans les mesures que j'ai faites, la température a varié entre les limites de $+3^\circ,1$ et de $+20^\circ,0$, c'est-à-dire

de 5°,6 au-dessous, et de 11°,3 au-dessus de la température moyenne +8°,7. Il est facile de voir, par la comparaison des mesures effectuées à des températures basses et à des températures élevées, qu'il existe très-probablement une inégalité dans le coefficient de dilatation, celui du pendule étant plus grand que celui de l'échelle, puisque les chiffres obtenus sont en général plus faibles dans le premier cas que dans le second.

J'ai essayé de déterminer cette inégalité en faisant concourir l'ensemble des 32 mesures, par la méthode des moindres carrés, au calcul de la différence du coefficient de dilatation qui accordait le mieux entre elles les mesures faites aux différentes températures; j'ai trouvé ainsi que le coefficient de dilatation du pendule était plus fort que celui de l'échelle de 0,0000009003 avec une incertitude probable de ±0,000000136. Si l'on admet le chiffre qui vient d'être indiqué pour la différence du coefficient de dilatation du pendule et de l'échelle, il faudra appliquer à chaque mesure faite à une température *t* une correction égale à $+0^{l},0002237$ (8°,7—*t*) pour la ramener à la longueur correspondant à la température moyenne +8°,7. Cette correction est donnée dans le tableau suivant, pour chaque jour, ainsi que le chiffre de la longueur corrigée.

(*Voir le tableau ci-derrière.*)

L'application de cette correction amène une diminution assez notable dans les écarts avec la moyenne; la somme des carrés est réduite de 0,0000908944 à 0,0000563920, en sorte que l'écart moyen n'est plus que de $\pm 0^{l},00134$ et l'erreur probable de la moyenne $\pm 0^{l},00016$. Mais puisque c'est à la température moyenne +8°,7 que l'on a réduit chacune des longueurs mesurées, en tenant compte de la différence dans le coefficient de dilatation, il faudra appliquer à la moyenne obtenue $248^{l},479475$ la correction $+0^{l},0002237$ (16°,25—8°,7) $=+0^{l},001689$ pour avoir la véritable longueur de la distance entre les couteaux à la température de 16° ¼, en ayant égard à l'inégalité du coefficient de dilatation. C'est

Date.	8°,7—t	Correction.	Longueur corrigée à 8°,7
	°	l	l
A. 20 novembre 1864	+ 1,5	+0,00034	248,48005
A. 20 novembre »	+ 1,3	+ 029	,48049
A. 22 novembre »	+ 0,3	+ 007	,47992
A. 25 novembre »	+ 1,1	+ 024	,48076
A. 27 novembre »	+ 1,2	+ 027	,47978
A. 28 novembre »	+ 1,9	+ 042	,48115
A. 17 décembre »	+ 3 4	+ 076	,47862
A. 22 décembre »	+ 3,5	+ 078	,47941
B. 18 janvier 1865	+ 5,1	+ 114	,47797
B. 18 janvier »	+ 4,7	+ 105	,47903
B. 24 janvier »	+ 2,1	+ 047	,47830
B. 24 janvier »	+ 1,9	+ 042	,47842
C. 22 février »	+ 4,7	+ 105	,47793
C. 22 février »	+ 5,6	+ 125	,47860
C. 19 mars »	+ 2,3	+ 051	,47774
C. 19 mars »	+ 2,1	+ 047	,47769
D. 3 avril »	+ 1,3	+ 029	,47696
D. 18 avril »	— 8,7	— 195	,47891
D. 23 avril »	—10,2	— 228	,47790
D. 24 avril »	—11,3	— 253	,47835
D. 26 avril »	—10,8	— 242	,47875
D. 18 octobre »	— 5,1	— 114	,48057
C. 9 novembre »	— 2,0	— 045	,48300
B. 24 novembre »	— 4,6	— 103	,48060
B. 25 novembre »	— 4,1	— 092	,47949
B. 15 décembre »	+ 5.4	+ 120	,48043
A. 23 février 1866	+ 0,6	+ 013	,48014
A. 25 février »	+ 0,9	+ 020	,48139
A. 25 février »	+ 0,4	+ 009	,48124
C. 15 mars »	+ 2,3	+ 051	,47928
C. 15 mars »	+ 2,1	+ 047	,47977
C. 16 mars »	+ 1,3	+ 029	,48056
Moyennes........	0,0	0,0	l 248,47947.5

en effet à la température de 16° $^1/_4$ qu'une règle divisée en pouces et lignes de Paris a la longueur exprimée par le nombre de pouces et de lignes. On trouve ainsi 248^l,48116 pour la distance entre les couteaux, soit pour la longueur du pendule, à la température de +16° $^1/_4$, en tenant compte de l'inégalité du coefficient de dilatation. Mais en ayant égard à l'incertitude probable sur la différence entre le coefficient de

dilatation du pendule et de l'échelle, la correction $+0^{l},001689$ est affectée d'une erreur probable de $\pm 0^{l},00025$.

Il est certainement à regretter que les circonstances de saison et de température, dans lesquelles les mesures ont été faites, n'aient pas été combinées de telle façon, que la moyenne des températures se rapprochât autant que possible de celle de $16^{\circ}\,{}^{1}/_{4}$, à laquelle les mesures doivent être réduites, dans le cas d'une inégalité du coefficient de dilatation, parce qu'alors la correction n'aurait été qu'une très-petite quantité. Je ne l'ai pas fait parce que je ne pouvais pas prévoir dans l'origine que l'inégalité du coefficient de dilatation donnerait lieu à une correctionaussi considérable. Si l'on prend dans le tableau, page 24, les observations faites aux températures les plus élevées, de telle sorte que la moyenne se rapproche beaucoup de $+16^{\circ}\,{}^{1}/_{4}$, il faut se restreindre aux huit mesures faites du 18 avril au 25 novembre 1865 inclusivement; la moyenne de ces huit mesures donne $248^{l},48129 \pm 0^{l},00024$ à la température moyenne de $+15^{\circ},8$. Pour la moyenne de ces huit mesures, la réduction à la température de $+16^{\circ}\,{}^{1}/_{4}$, pour tenir compte de l'inégalité du coefficient de dilatation, ne porte que sur une fraction de degré $0^{\circ},45$, et la correction s'élève seulement à $+0,00010$, ce qui donnerait $248^{l},48139$, chiffre qui s'accorde dans les limites des erreurs avec celui que nous avons trouvé plus haut par la moyenne de 32 mesures. La moyenne des 24 autres mesures du tableau, page 24, correspond à une température moyenne de $+6^{\circ},32$ et donne $248^{l},47887 \pm 0^{l},00020$. La réduction à la température $+16^{\circ}\,{}^{1}/_{4}$ avec la différence de 0,00000090 dans le coefficient de dilatation donne $248^{l},48109$, chiffre qui s'accorde avec celui obtenu par la moyenne des mesures faites à des températures élevées à $0^{l},00030$ près, c'est-à-dire dans la limite des erreurs, tandis que la différence s'élève à $0^{l},00240$, si l'on ne tient pas compte de l'inégalité du coefficient de dilatation. Cette inégalité est mise hors de doute par la discussion des observations, et le chiffre obtenu pour la différence doit être assez approché de la vérité, puisqu'il permet d'accorder à $0^{l},00030$ près les moyennes de deux séries de mesures faites à

des températures différant entre elles de 9° 1/2, tandis que l'écart s'élèverait à 0^l,00240, en supposant le coefficient de dilatation le même pour le pendule et pour l'échelle.

Il reste enfin à examiner la quatrième cause d'erreur dans les mesures, savoir celles qui proviennent de l'action exercée par la chaleur du corps de l'observateur sur le comparateur. Cette action doit être évidemment plus forte que celle qui a lieu sur l'échelle, ou sur le pendule, puisque la distance n'est que 3 à 4 pouces, au lieu d'être de 9 pouces environ. Si cette action avait pour effet une dilatation uniforme de toute la masse du comparateur, on pourrait espérer éliminer l'erreur, sinon en totalité, du moins en grande partie, en faisant une double observation sur le tranchant du couteau, avant et après celle de l'échelle; il est effectivement naturel d'admettre, dans ce cas, que la longueur absolue du comparateur, pour l'observation de l'échelle, est sensiblement égale à la moyenne de la longueur qu'il avait lors de la première et lors de la deuxième observation du tranchant du couteau. Mais il n'en est pas ainsi, parce que l'action calorifique du corps de l'observateur sur le comparateur produit un effet complexe, qui n'est point le même qu'une dilatation uniforme de toutes ses parties. Cette dilatation uniforme, ou l'allongement de l'axe du comparateur, aurait pour résultat une élévation du microscope supérieur, ou, ce qui revient au même, un abaissement relatif du tranchant du couteau, ou d'un trait de l'échelle. Cet abaissement relatif serait indiqué dans des observations consécutives du tranchant du couteau, ou d'un même trait de l'échelle, par la diminution du nombre des parties accusées sur le tambour de la vis micrométrique dans ces différentes lectures, les chiffres marqués sur le tambour allant en croissant avec les divisions de l'échelle. Si on examine les chiffres obtenus dans le tableau, page 22, pour les lectures consécutives faites sur un même trait de l'échelle, dans la détermination de la valeur d'une partie des microscopes, on voit que le contraire a lieu ordinairement. Le nombre des parties accusées dans la lecture du tambour va d'abord en croissant, atteint un maximum, puis diminue; ainsi le premier effet

de la chaleur du corps de l'observateur sur le comparateur est celui qui correspondrait à une élévation relative d'un trait de l'échelle, ou du tranchant du couteau [1], c'est-à-dire à un abaissement du microscope, ou à une contraction de la masse entière du comparateur. Cette contradiction apparente s'explique facilement par l'inégalité de réchauffement des différentes parties du comparateur; la face antérieure tournée du côté de l'observateur, et par conséquent la plus rapprochée de son corps, subit la première l'effet de l'élévation de la température, et, en raison de la conductibilité imparfaite du métal, elle se dilate plus que la face postérieure. Il doit en résulter une flexion, ou un changement d'inclinaison de l'axe optique du microscope, qui est ainsi amené sur un point plus bas de l'échelle. Une expérience très-simple permet de se convaincre de la réalité de cet effet de flexion; il suffit d'amener un trait de l'échelle entre les deux fils parallèles du microscope, puis d'approcher la main de la face antérieure du comparateur, on verra aussitôt le trait s'abaisser rapidement en apparence dans le microscope qui renverse, et l'on augmenterait d'un grand nombre de parties la lecture du tambour en ramenant le fil sur le trait. Si c'est au contraire de la face postérieure du comparateur que l'on approche la main, l'inverse a lieu, le trait s'élève en apparence dans le champ du microscope, et en ramenant le fil sur le trait, la lecture du tambour accuse une diminution dans le nombre de parties.

Comme la longueur totale du comparateur, depuis son extrémité inférieure jusqu'au microscope supérieur, est de $326^{l},5$, on obtient avec 0,000019 pour coefficient de dilatation, $0^{l},00062$ pour l'allongement correspondant à une élévation d'un dixième de degré centigrade dans la température. Ainsi, pour chaque dixième de degré, dont la chaleur du corps de l'observateur élève la température de la masse entière du comparateur, l'axe est allongé de $0^{l},00062$, ce qui produit une diminution de $2^{p},5$ dans la lecture de la vis micrométrique, en

[1] Les observations consécutives sur le tranchant du couteau donnent le même résultat, comme on le verra plus loin.

ramenant le fil sur un trait de l'échelle et sur le tranchant du couteau. Si, au contraire, les différentes parties du comparateur sont inégalement échauffées, et si l'élévation de température de la face antérieure dépasse d'un dixième de degré celle de la face postérieure, il y aura, par suite de l'inégalité de dilatation, un changement de 4″,92 dans l'inclinaison de l'axe optique du microscope. Ce changement d'inclinaison a pour effet d'amener le fil du microscope sur un point de l'échelle placé à $0^{l},00118$ plus bas que celui auquel il correspondait avant, et il faudrait augmenter de $4^{p},7$ le nombre de parties accusé sur le tambour de la vis micrométrique pour ramener le fil sur le même point.

Il est bien difficile de ne pas admettre la possibilité que la proximité de l'observateur produise, soit dans la masse entière du comparateur, soit sur la face antérieure comparativement à la face postérieure, des changements de température s'élevant à un dixième de degré, et au delà, même dans un court espace de temps, comme celui qui sépare l'observation de l'échelle de celle du tranchant du couteau. On comprend également, que l'effet complexe de la dilatation de toute la masse du comparateur, et de la flexion causée par l'inégalité de dilatation des deux faces opposées donne lieu à des modifications, dont la marche ne soit pas régulière, ou proportionnelle au temps. Le système suivi dans les observations permet bien d'éliminer des erreurs qui proviendraient de modifications proportionnelles au temps dans l'état du comparateur, mais non celles qui proviennent de modifications, dont la marche ne varie pas régulièrement avec le temps, et c'est à cette cause qu'il faut attribuer, en partie, les écarts entre les résultats obtenus d'un jour à l'autre pour la distance entre les couteaux.

J'ai essayé de déterminer directement, à combien pouvait s'élever approximativement l'élévation de température produite au bout d'un certain temps par la proximité de l'observateur dans la masse entière du comparateur, ainsi que la différence entre le réchauffement de la face antérieure et celui de la face postérieure. L'expérience directe ne peut donner, il est vrai, que des résultats approximatifs par l'observation

d'un thermomètre, dont la boule est appliquée alternativement contre la face antérieure et contre la face postérieure du comparateur, et celle de deux autres thermomètres suspendus l'un à un mètre, l'autre à deux mètres de distance ; on ne peut effectivement pas être sûr, vu la conductibilité imparfaite du métal, que le degré accusé par le thermomètre sur un point situé au milieu de la longueur du comparateur, soit celui qui correspond réellement à toute la face antérieure, ou à toute la face postérieure. Il est très-probable, que le thermomètre accusera une température plus élevée que celle que le métal possède réellement, en sorte que l'on peut regarder ses indications comme la limite supérieure de l'effet produit. Les chiffres que j'ai trouvés dans trois expériences pour l'élévation de température accusée, au bout de 15 minutes, par le thermomètre placé contre la face antérieure du comparateur, relativement aux deux autres thermomètres, sont :

$$\begin{array}{rr} & +0^\circ,85 \\ & +0,62 \\ & +0,65 \\ \hline \text{Moyenne} & +0,71 \end{array}$$

et pour le thermomètre placé contre la face postérieure,

$$\begin{array}{rr} & +0^\circ,55 \\ & +0,23 \\ & +0,38 \\ \hline \text{Moyenne} & +0,39 \end{array}$$

L'on doit naturellement s'attendre à trouver des différences, d'une expérience à l'autre, suivant l'excédant de la température du corps de l'observateur sur celle du milieu ambiant, suivant la proximité un peu plus ou un peu moins grande, etc.

En supposant ainsi que le thermomètre accuse la température réelle de la face antérieure et de la face postérieure du comparateur, la proximité de l'observateur produit au bout de 15 minutes une élévation de température, qui est de 0°,32 plus grande sur la face antérieure que sur la

face postérieure, et le réchauffement moyen de tout le comparateur est de $+ 0^{o},55$. Le calcul de la dilatation fait avec les chiffres résultant de la moyenne des trois expériences donne, par conséquent, $0^{l},0034$ pour l'allongement du comparateur tout entier, et $0^{l},0020$ pour l'inégalité de dilatation de la face antérieure et de la face postérieure. La flexion produit ainsi un changement de 15",74 dans l'inclinaison de l'axe optique du microscope supérieur, ce qui correspond à un abaissement de $0^{l},0038$ dans le point qui se trouve sous le fil du microscope. Si l'effet de la flexion est à peu près compensé, au bout de 15 minutes, par la dilatation de la masse entière du comparateur, on comprend facilement que ce soit l'effet de la flexion qui se manifeste le premier, la face antérieure se dilatant par suite de la proximité du corps de l'observateur, avant que l'élévation de la température ait pu se propager sur la face postérieure.

Dans les mesures de la distance des couteaux, l'effet de la flexion et de la dilatation du comparateur a dû être moins considérable que dans les expériences précédentes, où l'observateur restait pendant 15 minutes immobile à une très-petite distance du comparateur, tandis que, dans les mesures, il s'en rapprochait, ou s'en écartait alternativement. L'on a, du reste, un moyen d'évaluer approximativement les erreurs qui peuvent être dues à l'influence du corps de l'observateur sur le comparateur, puisque dans l'observation de l'échelle on a toujours fait successivement la lecture sur le trait $248^{l},4$ et sur le trait $248^{l},5$. En comparant le nombre de parties de la vis micrométrique compris entre ces deux lectures avec le nombre de parties du microscope supérieur correspondant à un dixième de ligne, savoir $402^{p},12$, la différence donne l'erreur provenant, soit de la modification dans l'état du comparateur entre ces deux observations, soit des erreurs de pointer proprement dites.

Dans les observations du tranchant des couteaux, sauf pour les trois premières déterminations, on a fait une observation avant celle de l'échelle et une après, la différence entre ces deux lectures donne ainsi l'erreur provenant, soit de la modification dans l'état du comparateur entre ces deux observations, soit des erreurs de pointer proprement

dites. Le tableau suivant renferme ces différences exprimées en parties des vis micrométriques, les deux premières colonnes donnent la différence entre le nombre de parties compris entre la lecture des traits $248^l,4$ et 248,5 et le chiffre de $402^p,12$ obtenu dans les expériences du tableau, page 22; les deux colonnes suivantes renferment la différence entre la seconde et la première lecture faites sur le tranchant du couteau supérieur; les deux dernières colonnes enfin renferment la différence entre la seconde et la première lecture faites sur le tranchant du couteau inférieur. Comme dans chaque détermination de la distance des couteaux, il a été fait une mesure de la distance des couteaux obscurs, et une de la distance des couteaux éclairés, c'est à la première de ces mesures que se rapportent les chiffres des colonnes, 1, 3 et 5, et à la seconde ceux des colonnes 2, 4 et 6. Je remarquerai seulement que, dans les trois déterminations marquées d'un astérisque, c'est dans la 1re, 3me et 5me colonnes que se trouvent les différences pour l'observation du tranchant éclairé, et dans la 2me, 4me et la 6me celles pour le tranchant obscur, attendu que, dans ces trois cas, c'est par l'observation des couteaux éclairés que l'on a commencé.

(*Voir le tableau ci-derrière.*)

L'on voit par les chiffres de ce tableau que le nombre moyen de parties du microscope supérieur, compris entre les traits $248^l,4$ et $248^l,5$ de l'échelle, s'accorde avec celui qui avait été obtenu dans les expériences du tableau, page 22, puisque la différence ne s'élève qu'à $+0^p,36$ dans la première mesure, et à $+0^p,02$ dans la seconde. On trouve par la somme des carrés pour l'écart moyen $\pm 2^p,00$ dans la première mesure, et $\pm 1^p,52$ dans la seconde; ces chiffres représentent par conséquent l'erreur moyenne, qui a été commise dans une détermination, en amenant les fils du microscope du trait $248^l,4$ au trait $248^l,5$, et qui provient, soit de l'inexactitude du pointer, soit d'une modification dans l'état du comparateur entre l'observation d'un trait et celle de l'autre. Il est évident, maintenant, que la moyenne des deux comparaisons faites avec

	Nombre de parties pour $0^l,1$.		Couteau supérieur.		Couteau inférieur.	
	Différences entre le nombre observé et $402^p,12$.		Différences entre la seconde lecture et la première.		Différences entre la seconde lecture et la première.	
	1re mesure.	2me mesure.	1re mesure.	2me mesure.	1re mesure.	2me mesure.
	p	p	p	p	p	p
25 novembre 1864	0,0	+0,9	+ 2,4	—1.2	+5,0	+3,4
27 novembre »	—1,1	—1,4	+ 3 5	—1,3	+2,2	—0,2
28 novembre »	+1,1	—1,1	+ 9,0	+5,15	+2,0	+4,65
17 décembre »	+1,0	—0,5	+ 1,15	—2,1	+4,6	+5,15
22 décembre »	—2,25	—2 4	+ 1,25	+1,0	+2,0	+1,65
18 janvier 1865	—1 0	+2,1	+ 0,15	+2,1	+0,25	+0 5
18 janvier »	+0,9	—0,3	+ 1.1	+3,3	+1,65	+0,2
24 janvier »	0,0	+0.1	+ 5,25	+4,0	—5,0	—3,5
24 janvier »	—0,8	—2,8	+ 2,1	+0,45	+1,4	+0,35
22 février »	+1,2	+1,5	+ 3,9	+1,5	—0,6	—1,25
22 février »	+1,4	—0,2	+ 2,1	+0,1	—0,25	—1,15
19 mars »	—1,6	—0.85	+ 7,0	—0,4	—1,3	—0,35
19 mars »	—1,5	—1,1	+ 6,65	+0 75	+0,4	—2,1
3 avril »	+2,9	+0,9	+ 8,7	+1,8	—2,2	—0,7
18 avril »	+0,9	+0,9	0,0	—1,1	—1.2	—0,3
23 avril »	+0,4	—1,1	— 0,1	+1,3	—1,0	—1,6
24 avril »	—0,2	0,0	+ 2,0	—0,15	—1,5	+0,6
26 avril »	+1,1	+1,7	+ 2,4	+1.1	—0,15	—2,0
18 octobre »	+2.7	+1.8	+ 6,1	+1,9	—1,35	—1,0
9 novembre »	+2,0	+0.5	+ 2,1	+2,4	+0,1	0.0
24 novembre »	+4.4	+1,9	— 3,15	+1,1	0,0	+1,15
25 novembre »	+4,1	+3.0	+ 4,85	+0 85	—1,3	—0,1
15 décembre »	—5,1	—2,4	+ 3,1	+2,5	—1,2	—0,5
23 février 1866	+1.3	—0,8	+ 3.5	—1,1	+0,5	—1,0
25 février »	+1,4	+1,0	+11,3	+1,35	—3,7	—3 2
25 février »	+1,2	+1,4	+ 7,65	+3.85	—2,5	—1,6
15 mars »	—1,5	—0,7	+ 1.0	+0,1	—2,2	—1,5
15 mars »	—2,0	—2,4	+ 5 0	+5,0	2,0	—2,15
16 mars »	—0,5	+0,9	+ 2,5	—0,65	+0,25	—0,65
Moyennes	+0,36	+0,02	+ 3,53	+1,16	—0,25	—0,25

le trait $248^l,4$ et avec le trait $248^l,5$ ne sera affectée que de la moitié de l'erreur, dont est entachée leur différence; l'erreur sera donc de $\pm 1^p,00$ dans le premier cas, et de $\pm 0^p,76$ dans le second.

Dans l'observation du tranchant du couteau supérieur on trouve, en moyenne, une différence de $+ 3^p,53$ entre la seconde lecture et la première, pour la première mesure, et de $+ 1^p,16$ pour la seconde. Le

signe positif de la différence montre, qu'elle provient d'une flexion du comparateur, et cet effet, dû à la flexion, est, comme on pouvait s'y attendre, plus prononcé pour la première mesure faite au moment où l'observateur s'approche de l'instrument, que pour la seconde. Dans l'observation du tranchant du couteau inférieur, la différence entre la seconde lecture et la première est en moyenne presque nulle, d'un quart de partie seulement; les modifications dans l'état du comparateur dues à la proximité de l'observateur devant être presque sans influence sur le microscope inférieur, placé près de son extrémité inférieure. Il est ainsi hors de doute, que la proximité de l'observateur produit une modification dans l'état du comparateur, de telle sorte que la lecture faite sur le tranchant du couteau supérieur avant l'observation de l'échelle diffère de quelques parties de celle, qui est faite au bout de quelques minutes, après l'observation de l'échelle; si l'on n'admet pas que ces modifications suivent une marche proportionnelle au temps, et qu'elles soient ainsi éliminées dans la moyenne des deux lectures faites sur le tranchant du couteau, elles produiront dans les mesures une erreur qui pourra être évaluée, au maximum, à la moitié de la différence entre les deux lectures. On trouvera ainsi, en faisant la somme des carrés des demi-différences du tableau précédent :

$\pm 2^p,38$	pour l'erreur	moyenne	dans la 1re	mesure du	couteau	supérieur.
$\pm 1,12$	»	»	dans la 2me	»	»	»
$\pm 1,09$	»	»	dans la 1re	mesure du	couteau	inférieur.
$\pm 1,00$	»	»	dans la 2me	»	»	»

Une détermination de la distance entre les couteaux obscurs repose sur quatre observations, savoir celle du tranchant du couteau supérieur, pour laquelle nous venons de trouver l'erreur moyenne $\pm 2^p,38$; celle de la division de l'échelle, erreur moyenne $\pm 1^p,00$; celle du tranchant du couteau inférieur, erreur moyenne $\pm 1^p,09$, enfin celle du trait 0 de l'échelle, pour laquelle nous pouvons également adopter $\pm 1^p,00$ pour erreur moyenne. On aura ainsi pour l'erreur moyenne d'une mesure de la distance entre les couteaux obscurs, provenant soit des erreurs de

pointer, soit des modifications dans l'état du comparateur pendant les observations,

$$\pm\sqrt{(2{,}38)^2+(1{,}00)^2+(1{,}09)^2+(1{,}00)^2} = \pm\, 2^p{,}98.$$

De même, une mesure de la distance entre les couteaux éclairés sera affectée d'une erreur moyenne,

$$= \pm\sqrt{(1{,}12)^2+(0{,}76)^2+(1{,}00)^2+(1{,}00)^2} = \pm\, 1^p{,}96.$$

Il en résulte donc $\pm\, 3^p{,}56 = \pm\, 0^l{,}00089$ pour l'erreur moyenne qui est produite, par les causes indiquées, dans la différence entre la distance des couteaux obscurs et celle des couteaux éclairés, et $\pm\, 1^p{,}78 = \pm\, 0^l{,}00045$ pour l'erreur moyenne qui est produite dans la demi-somme de la distance des couteaux obscurs et de celle des couteaux éclairés.

On voit, par conséquent, qu'il est impossible d'attribuer aux modifications produites par la proximité de l'observateur sur le comparateur l'écart moyen de $\pm\, 0^l{,}00134$ sur une détermination de la distance entre les couteaux, puisque la discussion précédente montre que l'erreur totale provenant des erreurs de pointer et de ces modifications ne s'élève en moyenne qu'à $0^l{,}00045$. En tenant compte de l'inégalité de température du pendule et de l'échelle, qui peut produire en maximum une erreur moyenne de $\pm\, 0^l{,}00050$, on obtiendrait ainsi $\pm\, 0^l{,}00067$ pour l'erreur moyenne d'une détermination, en ayant égard à toutes les causes d'erreur que nous avons examinées, tandis que l'on trouve d'après les chiffres du tableau, page 32, $\pm 0^l{,}00134$. On est ainsi amené à admettre, que les écarts entre les valeurs obtenues pour la distance des couteaux pendant la série des observations soient dus, en partie, à une autre cause qu'aux erreurs dans les mesures, et cette cause est facile à indiquer, c'est le changement d'ajustement des couteaux, qui peut produire une très-petite différence dans la distance qui sépare le tranchant des deux couteaux. Ce qui confirme cette explication, c'est la comparaison des valeurs obtenues d'un jour à l'autre pour la différence entre la distance des couteaux obscurs et celle des couteaux éclairés, tableau page 24; la

valeur moyenne de la différence est $+0^l,00060$, ainsi, par suite d'un effet d'irradiation, le champ éclairé empiète un peu sur la face sombre du couteau, et *vice versâ,* la face éclairée du couteau empiète un peu sur le champ obscur. Si l'on fait la somme des carrés des écarts entre chaque valeur et la moyenne, on trouve $\pm 0^l,00112$ pour l'erreur moyenne d'une détermination de la différence entre la distance des couteaux obscurs et celle des couteaux éclairés. Cette erreur ne provient que des erreurs accidentelles de pointer, des modifications dans l'état du comparateur, dues à la présence de l'observateur, qui se sont produites dans l'observation des couteaux obscurs et dans celle des couteaux éclairés, enfin des changements qui ont eu lieu dans la température relative de l'échelle et du pendule pendant la durée des observations; elle est naturellement indépendante des variations, qui auraient pu avoir lieu d'un jour à l'autre dans la longueur réelle du pendule, ainsi que de l'erreur dans la détermination de l'inégalité du coefficient de dilatation. Or, de l'erreur moyenne $\pm 0^l,00112$ sur la différence de longueur pour les couteaux obscurs et pour les couteaux éclairés, on déduit $\pm 0^l,00079$ pour l'erreur moyenne de l'une, ou de l'autre de ces longueurs, en supposant que l'erreur soit la même dans les deux cas, et, par suite, $\pm 0^l,00056$ pour l'erreur moyenne de leur demi-somme, c'est-à-dire d'une détermination de la distance des couteaux.

On voit ainsi que les observations elles-mêmes permettent d'apprécier l'erreur moyenne qui affecte une détermination, et qui provient des erreurs accidentelles de pointer et de l'influence du corps de l'observateur sur l'appareil. Elle s'élève à $\pm 0^l,00056$ et elle est, comme on pouvait s'y attendre, inférieure au chiffre de $\pm 0^l,00067$, auquel nous étions arrivés par un autre procédé, comme étant le maximum auquel cette erreur pût s'élever. Pour expliquer l'écart moyen de $\pm 0^l,00134$ dans les déterminations du tableau page 32, il faut, par conséquent, admettre une cause autre, que les erreurs commises dans la mesure, et qui puisse donner lieu à un écart moyen de $\pm 0^l,00121$. Si l'on groupe les observations du tableau page 32 en séries, en réunissant entre elles toutes les déter-

minations, dans lesquelles l'ajustement des couteaux est resté le même, on peut former le tableau suivant dans lequel je donne, pour les huit séries, la valeur moyenne de la distance entre les couteaux, l'erreur moyenne d'une détermination, résultant de la comparaison des déterminations de la même série, et l'erreur moyenne de la moyenne.

Ajustement.	Séries.	Nombre de mesures	Longueur moyenne.	Erreur moyenne d'une mesure.	Erreur moyenne de la moyenne.
			l	l	l
A	du 20 novembre au 17 décembre 1864	8	248,48002	±0,00080	±0,00028
B	du 18 janvier au 24 janvier 1865	4	248,47843	0,00044	0,00022
C	du 22 février au 19 mars »	4	248,47799	0,00042	0,00021
D	du 3 avril au 18 octobre »	6	248,47857	0,00120	0,00049
C	9 novembre »	1	248,48300	(0,00070)	(0,00070)
B	du 24 novembre au 15 décembre »	3	248,48017	0,00060	0,00034
A	du 23 février au 25 février 1866	3	248,48092	0,00068	0,00039
C	du 15 mars au 16 mars »	3	248,47987	0,00065	0,00037

L'erreur moyenne d'une mesure est ainsi réduite à $\pm 0^{l},00070$, si l'on ne compare entre elles que les déterminations faites dans le même ajustement; ce chiffre se rapproche beaucoup de celui auquel nous étions arrivés par la discussion des différentes causes d'erreur dans les mesures, savoir $\pm\ 0^{l},00067$.

Comme la série C, du 9 novembre, ne comprend qu'une seule détermination, je lui ai attribué pour erreur la valeur moyenne $\pm\ 0^{l},00070$, et je l'ai mise pour cette raison entre parenthèses. Si l'on attribue à la longueur fournie par chaque série un poids inversément proportionnel au carré de l'erreur moyenne de cette série, en prenant pour l'erreur correspondant à l'unité de poids $\pm\ 0^{l},00030.7$, on trouvera pour la moyenne probable des 8 séries $248^{l},47916$, l'écart moyen d'une série dont le poids est égal à 1 étant $\pm\ 0^{l},00120$. On voit ainsi que le changement d'ajustement des couteaux peut amener dans la longueur du pendule de petites différences, s'élevant en moyenne à $\pm 0^{l},00120$, c'est-à-dire presque identiquement le chiffre trouvé plus haut.

On peut remarquer que ces petites différences dans la longueur du pendule se produisent toutes les fois que l'ajustement des couteaux est changé, et que lorsque la même disposition des couteaux a été ramenée, après un certain intervalle de temps, la longueur du pendule ne revient pas la même. Elles doivent être probablement attribuées à la manière de fixer les couteaux dans les montures, en serrant un peu plus ou un peu moins les vis, bien que l'on ait eu le soin d'opérer autant que possible de la même manière dans ces changements. Il est évident que, pour procéder avec toute l'exactitude possible, il faudra tenir compte, dans la réduction des observations, de ces petites variations dans la distance des couteaux, et réduire chaque durée observée d'une oscillation en prenant pour la distance entre les couteaux celle qui se trouve dans la série correspondante. Si l'on négligeait ces petites variations dans la longueur de la distance entre les couteaux, en réduisant par conséquent toutes les observations avec la longueur moyenne, il en résulterait une erreur s'élevant en moyenne à $\pm \frac{1}{200000}$ dans chaque détermination, quantité qui est à peine appréciable, puisqu'elle ne produit qu'une différence de $\pm \frac{1}{400000}$ sur la durée de l'oscillation.

La valeur 0,00000090, trouvée plus haut pour la différence du coefficient de dilatation du pendule et de l'échelle, a été obtenue en ne tenant pas compte des petites variations, que le changement d'ajustement des couteaux introduit dans la longueur absolue du pendule. J'ai refait le calcul, en tenant compte de ces variations d'après le tableau de la page précédente, qui permet de trouver pour chaque série l'excédant de la longueur du pendule sur la valeur moyenne. Je suis ainsi parvenu au nombre 0,000000939 pour la différence du coefficient de dilatation du pendule et de l'échelle, valeur qui est de $^1/_{23}$ plus grande que la précédente. Il suffira, par conséquent, si l'on adopte cette nouvelle valeur, d'augmenter de $^1/_{23}$ les corrections qui résultent de l'inégalité du coefficient de dilatation, et qui ont été indiquées précédemment. Ainsi, par exemple, pour ramener à la température de $16^o\,^1/_4$ la distance des couteaux mesurée à la température moyenne de $+ 8^o,7$, il faudra ajouter

la correction $+0^l,001762$, au lieu de celle de $0^l,001689$ précédemment trouvée. Je me bornerai à donner, pour chaque série, la longueur moyenne du pendule à la température $+8^o,7$, et celle à la température $+16^o\,{}^1/_4$, d'après cette nouvelle valeur de l'inégalité du coefficient de dilatation.

					Longueur moyenne à $+8^o7$.	Longueur moyenne à $+16^o\,{}^1/_4$.
					l	l
1re série.	Ajustement	A	du 20 novembre au 17 décembre	1864	248,48004	248,48180
2me	»	B	du 18 janvier au 24 janvier	1865	248,47847	248,48023
3me	»	C	du 22 février au 19 mars	»	248 47803	248,47979
4me	»	D	du 3 avril au 18 octobre	»	248,47850	248,48026
5me	»	C	9 novembre	»	248,48298	248,48474
6me	»	B	du 24 novembre au 15 décembre	»	248,48016	248,48192
7me	»	A	du 23 février au 25 février	1866	248,48093	248,48269
8me	»	C	du 15 mars au 16 mars	»	248,47989	248,48165
			Moyenne des 32 mesures..........		248,47948	248,48124

J'indiquerai enfin le résultat de deux expériences que j'ai faites sur l'écrasement des couteaux, d'après la méthode décrite dans le chapitre précédent. Le poids additionnel qui était placé sur le disque supérieur, le pendule étant suspendu sur les fourchettes, mais le couteau étant très-près du plan de suspension, était de 450 grammes. Ce poids suffit, par la flexion des ressorts, pour amener le tranchant du couteau en contact avec le plan de suspension, sans qu'il ait à supporter le poids du pendule. L'expérience a été faite le 17 décembre 1864, sur le couteau portant la marque ., et le 22 décembre 1864 sur le couteau portant la marque . .; dans ces deux cas, j'ai pu constater un petit abaissement dans le niveau du tranchant du couteau inférieur, lorsque le pendule reposait de tout son poids sur le couteau supérieur au lieu de reposer sur les fourchettes, le tranchant du couteau supérieur ayant été amené à être en contact avec le plan de suspension par l'adjonction du poids additionnel. Ce petit abaissement, qui donne la mesure de l'écrasement des couteaux, a été trouvé dans les deux cas d'un peu plus

d'une partie du microscope inférieur, soit de $0^l,0003$; cette quantité est par conséquent en dedans des limites de l'incertitude provenant, soit des erreurs de pointer, soit de l'influence du corps de l'observateur sur l'appareil.

§ 4.

Détermination de la position du centre de gravité du pendule.

La distance du centre de gravité du pendule au tranchant de chacun des couteaux a été déterminée à l'aide de l'appareil décrit dans le § 2. Le pendule était d'abord mis en équilibre dans la position, où le centre de gravité est le plus rapproché de l'extrémité de la règle portant la languette avec laquelle on affleure le tranchant du couteau. Si l'on désigne par h la distance du centre de gravité au couteau le plus rapproché du disque plein, par x la longueur constante, dont la signification a été donnée dans le § 2, et par A la longueur sur la règle donnée par la différence de lecture des deux verniers, on a $A=h-x$. Le pendule est ensuite retourné bout à bout, et il est de nouveau mis en équilibre, le couteau le plus rapproché du disque creux étant affleuré par la languette, qui se trouve à l'une des extrémités de la règle. Si l'on désigne par h' la distance du centre de gravité au couteau le plus rapproché du disque creux, et par B la longueur sur la règle donnée par la différence de lecture des deux verniers, on a $B=h'-x$.

On en tire $h'-h=B-A$, et, par conséquent, la distance IG du centre de gravité au centre de figure $=\frac{h'-h}{2}=\frac{B-A}{2}$; puis $x=\frac{h'+h-(B+A)}{2}$, la somme $h'+h$ est égale à la distance entre les deux couteaux, que j'ai prise égale à $248^l,48$, approximation suffisante, puisque la lecture des verniers ne peut donner le centième de ligne que par estimation. De la valeur de x on déduit ensuite celle de h et de h'.

Les mesures suivantes ont été faites dans deux ajustements des couteaux, savoir A et C ; on a eu soin aussi de tourner le pendule de telle

façon que la même extrémité des couteaux fût tantôt en haut, tantôt en bas, ce qui est indiqué par la désignation *R* haut et *R* bas, la lettre *R* étant l'initiale du nom du fabricant gravé à l'extrémité de l'une des montures des couteaux.

Date. 1866	Ajustement et position de R.	A.	B.	IG.	*x*.	*h*.	*h'*.
		l	l		l	l	l
2 février	A. R haut	49,35	124,20	37,425	37,465	86,815	161,665
9 février	A. R haut	49,32	124 24	37,46	37,46	86,78	161,70
9 février	A. R bas	49,30	124,25	37,475	37,465	86,765	161,715
26 février	A. R haut	49,37	124,30	37,465	37,405	86,775	161,705
26 février	A. R bas	49,32	124,30	37,49	37,43	86,75	161,73
7 mars	C. R bas	49,28	124,24	37,48	37,48	86,76	161,72
7 mars	C. R haut	49,33	124,25	37,46	37,45	86,78	161,70
16 mars	C. R haut	49,35	124.26	37.455	37,435	86,785	161,695
16 mars	C. R bas	49.32	124,25	37,465	37,455	86,775	161,705
Moyenne	9 mesures			37,464	37,450	86,776	161,704

Ces mesures font connaître, par conséquent, avec toute l'exactitude désirable, la position du centre de gravité du pendule; l'écart moyen sur une valeur de IG, *h* ou *h'* est de $\pm 0^{l},024$, les moyennes peuvent donc être regardées comme exactes à moins d'un centième de ligne près.

L'erreur est ainsi de $\frac{1}{4000}$ environ sur la distance de $37^{l},464$ qui sépare le centre de gravité du pendule du centre de figure, elle n'est que de $\frac{1}{9000}$ sur la distance qui sépare le centre de gravité du couteau le plus rapproché et de $\frac{1}{17000}$ sur celle qui sépare le centre de gravité du couteau le plus éloigné. Comme la correction qu'il faut apporter à la distance des couteaux, pour avoir la longueur du pendule simple faisant une oscillation dans le vide dans le même temps que la durée observée, est à peu près de $+ 0^{l},20$, lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité, et de $+ 0^{l},11$, lorsqu'il est suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, l'incertitude sur cette correction, provenant de l'erreur dans la détermination du centre de gravité, ne sera que de $0^{l},00005$ dans le premier cas, et

de $0^l,00003$ dans le second. L'on peut ainsi regarder cette détermination de la position du centre de gravité comme suffisamment exacte pour le but que l'on a en vue.

CHAPITRE III.

Détermination de la durée d'une oscillation.

Ainsi que je l'ai exposé dans l'introduction, j'ai fait deux séries d'expériences sur la durée d'une oscillation; dans la première, c'était par l'intervalle de 376 secondes employé pour 500 oscillations, que la durée d'une oscillation était obtenue; dans la seconde série, l'intervalle était de 2130 secondes et le nombre des oscillations de 2828. Bien que les observations de la première série ne permettent pas d'obtenir la durée d'une oscillation avec une exactitude comparable à celle de la seconde, et qu'il ne soit pas possible d'en tenir compte dans le résultat final, il m'a paru préférable de les publier comme les autres, au lieu de les passer complétement sous silence. La discussion de ces observations peut en effet permettre d'apprécier la grandeur comparative de l'erreur, dont est affecté un intervalle de temps obtenu par l'enregistrement chronographique, suivant que cet intervalle est plus ou moins long, et de comparer dans les deux cas la part d'erreur qui revient à l'enregistrement électrique, et celle qui provient d'erreurs physiologiques.

Lorsque c'est une pendule auxiliaire qui trace les secondes sur la bande de papier, comme c'est le cas à Genève, il est nécessaire de transformer en temps de la pendule sidérale normale un instant donné par l'enregistrement électrique en temps de la pendule chronographique. C'est par les expériences et comparaisons faites en vue d'effectuer cette transformation que je commencerai.

§ 5.

Comparaisons de la pendule chronographique et de la pendule sidérale Dent.

Le théodolithe, qui servait à l'observation des oscillations du pendule était placé très-près de la pendule normale Dent, dont l'observateur pouvait facilement entendre les battements; la comparaison de la pendule chronographique et de la pendule normale s'effectuait en donnant à l'aide du levier-clef une série de signaux correspondant aux battements de la pendule normale. Les tableaux suivants renferment les résultats de ces comparaisons pour chaque jour d'observation; la première colonne donne l'instant moyen de chaque comparaison, la deuxième la correction qu'il faut appliquer, d'après la moyenne de tous les signaux consécutifs, à la pendule chronographique pour la ramener à la pendule Dent, la troisième le nombre des signaux qui ont concouru à cette moyenne, la quatrième l'erreur moyenne d'un signal, calculée par la somme des carrés des écarts d'un signal avec la moyenne, la cinquième l'erreur moyenne de cette moyenne, enfin la sixième l'écart, ou la différence entre la correction de la pendule chronographique fournie par l'observation et celle, qui a été calculée par une formule déduite de l'ensemble de toutes les comparaisons faites le même jour. J'indiquerai plus loin de quelle manière ces formules ont été obtenues.

Comparaisons de la pendule chronographique avec la pendule normale Dent.

Première série d'expériences.

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.	Écart.
20 novembre 1864					
	s		s	s	s
$18^h33^m20^s$	+0,387	41	±0,041	±0,0064	+0,004
37 20	+0,313	41	,035	,0055	— ,015
41 50	+0,301	41	,032	,0050	+ ,034
47 0	+0,168	32	,035	,0062	— ,029
51 0	+0,144	41	,035	,0055	,000
54 20	+0,099	41	,038	,0059	— ,001
19 0 20	+0,019	41	,020	,0031	— ,004
4 20	—0,030	41	,024	,0037	— ,002
8 40	—0,056	41	,044	,0069	+ ,026
14 0	—0,162	41	,029	,0046	— ,015
18 0	—0,190	41	,036	,0056	+ ,005
22 10	—0,249	41	,037	,0057	— ,004
23 décembre 1864					
	s		s	s	s
$18^h38^m20^s$	+0,381	41	±0,040	±0,0063	—0,016
46 40	+0,417	41	,046	,0072	+ ,012
52 0	+0,420	41	,048	,0075	+ ,010
19 2 0	+0,418	41	,047	,0074	— ,001
5 20	+0,429	41	,032	,0050	+ ,007
11 0	+0,423	41	,065	,0101	— ,004
28 40	+0,440	41	,041	,0064	— ,001
32 40	+0,420	41	,024	,0038	— ,024
37 0	+0,470	41	,047	,0074	+ ,022
43 0	+0,435	41	,027	,0042	— ,018
47 0	+0,457	39	,028	,0045	+ ,001
51 40	+0,472	33	,061	,0107	+ ,012
8 janvier 1865					
	s		s	s	s
$18^h38^m15^s$	+0,314	28	±0,040	±0,0075	—0,006
42 45	+0,328	31	,037	,0067	— ,007
47 25	+0,367	31	,036	,0064	+ ,010
53 45	+0,401	31	,033	,0060	+ ,017
57 45	+0,396	31	,024	,0043	— ,005
19 2 35	+0,422	31	,045	,0082	— ,001
8 janvier 1865 (suite).					
	s		s	s	s
$19^h\ 8^m15^s$	+0,454	31	±0,022	±0,0039	+0,005
12 15	+0,451	31	,035	,0063	— ,017
16 35	+0,490	31	,042	,0076	,000
30 25	+0,553	31	,032	,0059	— ,008
34 15	+0,596	31	,027	,0050	+ ,015
39 15	+0,605	31	,030	,0055	— ,003
9 janvier 1865					
	s		s	s	s
$18^h46^m15^s$	+0,682	31	±0,034	±0,0062	0,000
50 15	+0,722	31	,038	,0068	+ ,014
55 15	+0,725	31	,028	,0051	— ,016
19 0 45	+0,781	31	,032	,0058	+ ,002
4 15	+0,796	31	,032	,0057	— ,008
9 15	+0,837	26	,030	,0059	— ,004
14 45	+0,893	31	,028	,0051	+ ,008
19 15	+0,932	31	,047	,0084	+ ,011
23 45	+0,943	31	,025	,0045	— ,016
30 15	+1,030	31	,021	,0038	+ ,014
34 15	+1,055	31	,030	,0054	+ ,003
39 15	+1,090	31	,043	,0077	— ,009
28 janvier 1865					
	s		s	s	s
$22^h11^m15^s$	+0,994	31	±0,043	±0,0076	+0,008
15 15	+1,007	31	,034	,0061	,000
20 15	+1,021	31	,034	,0061	— ,011
25 15	+1,050	31	,044	,0079	— ,004
29 45	+1,069	31	,029	,0052	— ,003
35 0	+1,082	31	,040	,0071	— ,009
39 45	+1,127	31	,035	,0062	+ ,021
44 15	+1,124	31	,027	,0049	+ ,006
48 45	+1,122	31	,031	,0056	— ,007
54 45	+1,140	31	,041	,0074	,000
59 15	+1,146	31	,024	,0044	,000
23 4 15	+1,149	31	,028	,0051	— ,002

Comparaisons de la pendule chronographique avec la pendule normale Dent.

Première série d'expériences.

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne		Écart.
			d'un signal.	de la moyenne.	
29 janvier 1865					
	s		s	s	s
$19^h45^m45^s$	+0,089	31	±0,035	±0,0063	−0,005
50 15	+0,106	31	,027	,0048	+ ,003
54 45	+0,113	31	,029	,0052	,000
59 15	+0,123	31	,038	,0068	+ ,001
20 3 15	+0,139	31	,027	,0048	+ ,008
8 15	+0,142	31	,029	,0052	,000
12 45	+0,157	29	,028	,0052	+ ,004
17 15	+0,154	31	,035	,0062	− ,010
22 45	+0,160	29	,027	,0051	− ,017
28 45	+0,208	31	,029	,0052	+ ,015
33 15	+0,204	31	,036	,0064	,000
37 45	+0,208	31	,028	,0050	− ,008
43 15	+0,245	28	,038	,0072	+ ,014
47 45	+0,248	31	,036	,0066	+ ,005
52 15	+0,246	31	,027	,0049	− ,010
8 février 1865					
	s		s	s	s
$22^h28^m45^s$	−0,271	31	±0,052	±0,0093	−0,012
37 30	−0,212	31	,040	,0072	+ ,022
42 15	−0,215	31	,022	,0039	+ ,006
57 45	−0,188	31	,040	,0071	− ,013
23 2 15	−0,172	31	,036	,0065	− ,011
31 0	−0,059	31	,030	,0054	+ ,008
[1] 35 45	−0,149	31	,028	,0050	− ,008
39 45	−0,124	30	,030	,0056	+ ,003
55 30	−0,069	31	,028	,0051	+ ,003
0 0 0	−0,037	31	,037	,0053	+ ,018
4 15	−0,050	31	,029	,0052	− ,011
10 15	−0,021	31	,040	,0071	− ,004
14 15	+0,005	31	,035	,0063	+ ,006
19 15	+0,010	31	,026	,0047	− ,007
18 mars 1865					
	s		s	s	s
$0^h56^m45^s$	+0,153	31	±0,031	±0,0055	−0,002
1 1 15	+0,144	31	,030	,0055	− ,004
5 45	+0,155	29	,019	,0035	+ ,014
13 45	+0,130	31	,033	,0059	− ,001
18 15	+0,118	31	,035	,0063	− ,007
23 15	+0,114	31	,031	,0056	− ,006
28 15	+0,117	31	,027	,0049	,000
33 15	+0,114	31	,023	,0042	+ ,001
38 15	+0,122	31	,022	,0040	+ ,011
44 15	+0,103	31	,032	,0058	− ,006
49 15	+0,111	31	,036	,0065	+ ,003
53 45	+0,105	31	,030	,0053	− ,003
29 mars 1865					
	s		s	s	s
$23^h59^m45^s$	+0,337	31	±0,027	±0,0049	0,000
0 4 15	+0,333	31	,035	,0063	+ ,004
9 15	+0,317	31	,033	,0059	− ,001
15 15	+0,297	31	,040	,0072	− ,008
19 45	+0,290	31	,026	,0047	− ,004
24 15	+0,294	31	,043	,0078	+ ,011
29 45	+0,273	31	,036	,0065	+ ,003
34 15	+0,253	31	,043	,0077	− ,004
39 15	+0,237	31	,027	,0048	− ,005
46 45	+0,229	31	,032	,0058	+ ,009
51 15	+0,204	31	,029	,0053	− ,001
56 15	+0,185	31	,020	,0036	− ,003

[1] Avant cette comparaison, à 23^h32^m, on a changé la plume des signaux de la pendule chronographique, ce qui a amené un changement de la parallaxe des deux plumes, et par suite de l'équation des deux pendules.

Comparaisons de la pendule chronographique avec la pendule normale Dent.

Première série d'expériences.

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.	Écart.
30 MARS 1865					
	s		s	s	s
$1^h44^m15^s$	—0,313	28	±0,037	±0,0069	—0,018
48 45	—0,282	31	,030	,0053	+ ,029
53 45	—0,330	31	,025	,0046	— ,002
58 45	—0,352	31	,052	,0093	— ,008
2 3 15	—0,352	31	,039	,0070	+ ,003
7 45	—0,372	31	,025	,0044	— ,006
12 45	—0,385	31	,035	,0063	— ,010
17 15	—0,370	31	,026	,0046	+ ,012
22 15	—0,378	31	,025	,0045	+ ,009
26 45	—0,403	31	,026	,0047	— ,011
31 15	—0,395	31	,042	,0075	— ,001
36 15	—0,391	31	,025	,0045	+ ,003
17 AVRIL 1865					
	s		s	s	s
$3^h53^m45^s$	+0,757	31	±0,033	±0,0060	—0,008
58 15	+0,740	31	,025	,0045	+ ,013
4 2 45	+0,687	31	,027	,0049	— ,003
17 AVRIL 1865 (suite).					
	s		s	s	s
$4^h\ 7^m15^s$	+0,653	31	±0,034	±0,0061	0,000
11 45	+0,619	31	,026	,0048	+ ,002
16 15	+0,587	31	,042	,0075	+ ,006
21 15	+0,523	31	,036	,0065	— ,019
25 45	+0,511	31	,037	,0067	+ ,004
30 45	+0,473	31	,024	,0043	+ ,005
[1] 5 0 15	+0,321	31	,031	,0056	+ ,002
4 45	+0,283	31	,029	,0052	— ,003
9 15	+0,256	30	,028	,0051	+ ,001
10 MAI 1865					
	s		s	s	s
$2^h30^m15^s$	—0,336	31	±0,024	±0,0043	—0,011
34 45	—0,317	31	,030	,0054	+ ,007
39 45	—0,316	31	,029	,0052	+ ,009
3 9 15	—0,385	31	,036	,0065	— ,016
13 45	—0,375	31	,031	,0056	+ ,005
18 15	—0,387	31	,031	,0056	+ ,006

Deuxième série d'expériences.

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.	Écart.
11 JUIN 1865					
	s		s	s	s
$3^h43^m25^s$	-0,6439	51	±0,039	±0,0055	-0,0079
46 15	-0,6343	51	,028	,0040	+ ,0133
4 18 55	-0,7955	51	,035	,0049	- ,0094
21 35	-0,8152	51	,035	,0050	- ,0178
30 55	-0,8345	51	,032	,0045	+ ,0035
33 45	-0,8294	51	,036	,0050	+ ,0208
5 6 25	-0,9914	51	,029	,0041	- ,0021
9 15	-0,9989	51	,029	,0041	+ ,0022
11 JUIN 1865 (suite).					
	s		s	s	s
$5^h20^m15^s$	-1,0547	51	±0,028	±0,0038	-0,0090
23 5	-1,0556	51	,037	,0052	+ ,0013
55 45	-1,1504	51	,036	,0051	+ ,0266
58 35	-1,1924	51	,032	,0046	- ,0059
6 10 5	-1,2311	51	,032	,0045	- ,0082
13 5	-1,2432	51	,025	,0035	- ,0113
45 35	-1,3129	51	,039	,0054	- ,0010
48 35	-1,3131	51	,025	,0035	+ ,0045

[1] Avant cette comparaison, à 4^h32^m, on a changé la plume des signaux de la pendule chronographique, ce qui a amené un changement de la parallaxe des deux plumes.

Comparaisons de la pendule chronographique avec la pendule normale Dent.

Deuxième série d'expériences.

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.	Écart.
12 juin 1865					
	s		s	s	s
6h34m25s	-0,8010	51	±0,030	±0,0043	-0,0038
37 15	-0,8024	51	,031	,0045	+ ,0053
7 9 55	-0,9306	51	,028	,0040	- ,0039
12 55	-0,9416	51	,038	,0054	- ,0048
20 55	-0,9601	51	,024	,0034	+ ,0032
23 55	-0,9675	51	,028	,0040	+ ,0055
56 25	-1,0805	51	,031	,0045	- ,0082
59 25	-1,0717	51	,028	,0040	+ ,0091
8 8 25	-1,1061	51	,032	,0045	,0000
11 25	-1,1201	51	,031	,0044	- ,0057
43 55	-1,1890	51	,030	,0042	+ ,0107
46 55	-1,2022	51	,034	,0048	+ ,0050
55 25	-1,2342	51	,034	,0048	- ,0060
58 25	-1,2434	51	,039	,0055	- ,0079
9 30 55	-1,3140	51	,031	,0044	- ,0018
33 55	-1,3155	51	,031	,0045	+ ,0032
26 octobre 1865					
	s		s	s	s
14h45m55s	+0,1766	51	±0,029	±0,0041	+0,0023
48 55	+0,1900	51	,028	,0040	+ ,0092
15 21 25	+0,2324	51	,038	,0054	- ,0200
24 25	+0,2523	51	,034	,0048	- ,0069
46 25	+0,3092	51	,033	,0047	- ,0009
49 25	+0,3160	51	,035	,0049	- ,0013
16 21 55	+0,4104	51	,037	,0052	+ ,0132
24 55	+0,4046	51	,038	,0053	- ,0004
33 25	+0,4506	51	,040	,0056	+ ,0236
36 25	+0,4473	51	,038	,0053	+ ,0124
17 8 55	+0,5040	51	,043	,0061	- ,0202
11 55	+0,5081	51	,036	,0051	- ,0248
21 25	+0,5519	51	,035	,0049	- ,0088
24 25	+0,5852	51	,033	,0047	+ ,0156
56 55	+0,6685	51	,041	,0057	- ,0026
59 55	+0,6905	51	,038	,0053	+ ,0096

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.	Écart.
30 octobre 1865					
	s		s	s	s
13h50m25s	-0,7590	51	±0,037	±0,0052	-0,0030
53 25	-0,7513	51	,028	,0039	+ ,0038
14 25 55	-0,7812	51	,035	,0049	- ,0014
28 55	-0,7850	51	,033	,0047	+ ,0002
36 25	-0,7989	51	,031	,0043	+ ,0002
39 25	-0,8019	51	,035	,0049	+ ,0034
15 11 55	-0,9030	51	,029	,0040	- ,0109
14 55	-0,9148	51	,028	,0039	- ,0134
23 25	-0,9131	51	,031	,0043	+ ,0151
26 25	-0,9306	51	,032	,0045	+ ,0073
58 55	-1,0274	51	,027	,0038	+ ,0172
16 1 55	-1,0614	51	,035	,0050	- ,0072
11 25	-1,0832	51	,033	,0047	+ ,0006
14 25	-1,1088	51	,022	,0031	- ,0160
46 55	-1,1658	51	,031	,0044	+ ,0093
49 55	-1,1863	51	,030	,0042	- ,0053
13 novembre 1865					
	s		s	s	s
14h29m25s	-0,3023	51	±0,034	±0,0048	-0,0106
32 25	-0,2878	51	,035	,0050	+ ,0054
15 4 55	-0,2589	51	,037	,0052	+ ,0217
7 55	-0,2672	51	,031	,0043	+ ,0098
16 25	-0,2870	51	,037	,0052	- ,0216
19 25	-0,2601	51	,033	,0047	- ,0002
52 5	-0,1970	51	,040	,0057	- ,0084
55 5	-0,1890	51	,034	,0048	- ,0083
16 3 25	-0,1508	51	,033	,0047	+ ,0072
6 25	-0,1508	51	,028	,0039	- ,0012
38 55	-0,0589	51	,035	,0049	- ,0058
41 55	-0,0329	51	,047	,0066	+ ,0111
51 25	+0,0029	51	,027	,0038	+ ,0183
54 25	-0,0211	51	,031	,0044	- ,0146
17 26 55	+0,0766	51	,036	,0050	- ,0058
29 55	+0,0926	51	,040	,0056	+ ,0029

Comparaisons de la pendule chronographique avec la pendule normale Dent.

Deuxième série d'expériences.

Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne		Écart.	Heure sidérale.	Correction de la pendule chronographique sur la pendule Dent.	Nombre de signaux.	Erreur moyenne		Écart.
			d'un signal.	de la moyenne.					d'un signal.	de la moyenne.	
17 NOVEMBRE 1865						25 JANVIER 1866					
	s		s	s	s		s		s	s	s
14h46m25s	+0,2039	51	±0,032	±0,0046	-0,0008	21h22m25s	-0,0038	51	±0,032	±0,0047	-0,0112
49 25	+0,1986	51	,035	,0050	- ,0013	25 25	+0,0061	51	,032	,0047	+ ,0138
15 21 55	+0,1333	51	,029	,0041	+ ,0056	57 55	-0,1554	51	,034	,0048	- ,0025
24 55	+0,1161	51	,030	,0043	- ,0035	22 0 55	-0,1680	51	,033	,0047	- ,0033
[1] 35 25	+0,1156	51	,029	,0041	- ,0117	11 25	-0,1994	51	,041	,0059	+ ,0045
38 25	+0,1406	51	,029	,0041	+ ,0219	14 25	-0,2212	51	,034	,0049	- ,0066
16 10 55	+0,0136	51	,026	,0037	- ,0087	46 55	-0,2977	51	,031	,0044	+ ,0180
13 55	-0,0067	51	,028	,0040	- ,0203	49 55	-0,3118	51	,034	,0049	+ ,0121
22 25	-0,0040	51	,037	,0053	+ ,0062	58 25	-0,3624	51	,030	,0043	- ,0164
25 25	-0,0101	51	,034	,0049	+ ,0082	23 1 25	-0,3671	51	,034	,0049	- ,0127
57 55	-0,0878	51	,038	,0054	+ ,0043	33 55	-0,4292	51	,028	,0040	- ,0048
17 0 55	-0,0926	51	,029	,0041	+ ,0045	36 55	-0,4149	51	,037	,0053	+ ,0153
9 25	-0,1036	51	,028	,0040	+ ,0056	46 25	-0,4545	51	,032	,0047	- ,0069
12 25	-0,1226	51	,040	,0057	- ,0099	49 25	-0,4516	51	,027	,0039	+ ,0013
44 55	-0,1187	51	,026	,0037	+ ,0003	0 21 55	-0,5051	51	,033	,0047	- ,0001
47 55	-0,1170	51	,025	,0036	- ,0008	24 55	-0,5095	51	,033	,0047	- ,0001
20 DÉCEMBRE 1865						26 JANVIER 1866					
	s		s	s	s		s		s	s	s
17h11m55s	-0,3220	51	±0,040	±0,0056	+0,0026	19h 6m25s	-0,7460	51	±0,029	±0,0041	+0,0012
14 55	-0,3122	51	,042	,0059	+ ,0047	9 25	-0,7718	51	,030	,0043	- ,0110
47 25	-0,2360	51	,040	,0056	+ ,0045	41 55	-0,8636	51	,032	,0046	+ ,0340
50 25	-0,2418	45	,040	,0059	- ,0077	44 55	-0,8891	51	,026	,0037	+ ,0202
59 55	-0,2331	51	,028	,0040	- ,0186	53 25	-0,9571	51	,031	,0044	- ,0152
18 2 55	-0,2192	51	,028	,0040	- ,0108	56 25	-0,9838	51	,027	,0039	- ,0307
35 25	-0,1384	51	,026	,0037	+ ,0113	20 28 55	-1,0744	51	,023	,0033	- ,0098
38 25	-0,1315	51	,049	,0070	+ ,0134	31 55	-1,0718	51	,028	,0040	+ ,0021
[2] 49 55	-0,1324	51	,036	,0051	+ ,0100	41 25	-1,0945	51	,033	,0047	+ ,0080
52 55	-0,1238	51	,028	,0040	+ ,0143	44 25	-1,1141	51	,024	,0034	- ,0029
19 25 25	-0,1127	51	,040	,0057	- ,0148	21 16 55	-1,1903	51	,035	,0050	+ ,0047
28 25	-0,1088	51	,030	,0043	- ,0140	19 55	-1,2112	51	,029	,0041	- ,0095
37 25	-0,0958	51	,029	,0042	- ,0097	28 25	-1;2200	51	,033	,0047	- ,0001
40 25	-0,0754	51	,039	,0056	+ ,0079	31 25	-1,2131	51	,026	,0037	+ ,0129
20 12 55	-0,0629	51	,033	,0047	- ,0021	22 3 55	-1,2872	51	,029	,0041	- ,0062
15 55	-0,0509	51	,027	,0039	+ ,0084	6 55	-1,2834	51	,030	,0043	+ ,0017

[1] Avant cette comparaison, à 15^h27^m, on a changé la plume des signaux de la pendule normale, ce qui a amené un changement de la parallaxe des deux plumes.

[2] Avant cette comparaison, à 18^h41^m, la plume des signaux de la pendule chronographique a été changée, ce qui a amené un changement de la parallaxe des deux plumes.

Comme l'interrupteur de la pendule chronographique altère assez notablement sa marche, on ne peut pas la supposer parfaitement uniforme, même pendant l'intervalle de trois heures que duraient les observations de la deuxième série, ni même pendant un intervalle plus court encore, comme pour celles de la première série. Mais si la marche de la pendule ne peut pas être supposée uniforme, les irrégularités provenant de l'interrupteur peuvent être éliminées en calculant la correction, qu'il faut appliquer à ses indications pour les ramener à la pendule normale, par une formule empirique de la forme :

$$C = M + a.t + b.t^2 + c.t^3 + \text{etc.},$$

t étant l'intervalle de temps compris entre l'instant, pour lequel on veut calculer la correction, et l'instant moyen de toutes les comparaisons d'un jour, intervalle exprimé dans une unité arbitraire, et M, a, b, c, etc. des constantes, qui doivent être déterminées par la méthode des moindres carrés à l'aide de toutes les comparaisons faites le même jour. J'ai obtenu ainsi pour chaque jour d'observation les formules suivantes, dans lesquelles je me suis borné aux termes en t^2 pour la première série d'expériences, qui duraient en général une heure seulement et dans lesquelles j'ai pris 10 minutes pour l'unité de t. Pour les comparaisons de la deuxième série, j'ai tenu compte encore du terme en t^3, et l'unité de t a été prise de 30 minutes. Dans les cas, où l'une ou l'autre des plumes a été changée pendant la durée des observations, ce qui amène toujours un petit changement dans la position des deux plumes, et, par suite, dans l'équation des deux pendules, il est donné deux valeurs de la constante M, dont la première se rapporte aux comparaisons faites avant, et la seconde aux comparaisons faites après le changement des plumes.

Première série d'expériences.

L'unité de t est de 10^m.

Année	Date	Instant moyen des comparaisons.	Formule
1864	20 novembre.	$18^h57^m42^s$	$c = +0{,}0568^s - 0{,}12867^s.t + 0{,}00219^s.t^2$
	23 décembre.	19 17 56,7	$c = +0{,}4325 + 0{,}00841.t - 0{,}00011.t^2$
1865	8 janvier...	19 6 55	$c = +0{,}4429 + 0{,}04685.t + 0{,}00136.t^2$
	9 janvier...	19 12 15	$c = +0{,}8647 + 0{,}07830.t + 0{,}00312.t^2$
	28 janvier...	22 37 15	$c = +1{,}0984 + 0{,}03168.t - 0{,}00451.t^2$
	29 janvier...	20 18 30	$c = +0{,}1670 + 0{,}02435.t + 0{,}00059.t^2$
	8 février...	23 31 15	$\left.\begin{matrix} c = -0{,}0666 \\ c = -0{,}1566 \end{matrix}\right\} + 0{,}03390.t + 0{,}00050.t^2$
	18 mars.....	1 25 30	$c = +0{,}1187 - 0{,}00826.t + 0{,}00156.t^2$
	29 mars.....	0 27 30	$c = +0{,}2754 - 0{,}02616.t - 0{,}00144.t^2$
	30 mars.....	2 10 15	$c = -0{,}3707 - 0{,}01914.t + 0{,}00391.t^2$
	17 avril.....	4 25 9	$\left.\begin{matrix} c = +0{,}5114 \\ c = +0{,}5796 \end{matrix}\right\} - 0{,}07768.t + 0{,}00093.t^2$
	10 mai.....	2 54 15	$c = -0{,}3390 - 0{,}01434.t - 0{,}00348.t^2$

Deuxième série d'expériences.

L'unité de t est de 30^m.

Année	Date	Instant moyen des comparaisons.	Formule
1865	11 juin.....	$5^h15^m20^s$	$c = -1{,}0260^s - 0{,}12148^s.t + 0{,}005375^s.t^2 + 0{,}00114^s.t^3$
	12 juin.....	8 4 2	$c = -1{,}0938 - 0{,}08442.t + 0{,}00404.t^2 - 0{,}000313.t^3$
	26 octobre...	16 26 2,5	$c = +0{,}4078 + 0{,}07728.t + 0{,}00271.t^2 + 0{,}000155.t^3$
	30 octobre...	15 19 40	$c = -0{,}9162 - 0{,}09528.t - 0{,}00580.t^2 + 0{,}00273.t^3$
	13 novembre.	15 59 26,25	$c = -0{,}1690 + 0{,}08179.t + 0{,}00750.t^2 - 0{,}00205.t^3$
	17 novembre.	16 17 40	$\left.\begin{matrix} c = -0{,}0342 \\ c = +0{,}0030 \end{matrix}\right\} - 0{,}08467.t + 0{,}00653.t^2 + 0{,}00281.t^3$
	20 décembre.	18 44 2,5	$\left.\begin{matrix} c = -0{,}1362 \\ c = -0{,}1512 \end{matrix}\right\} + 0{,}04568.t - 0{,}00511.t^2 - 0{,}000003.t^3$
1866	25 janvier...	22 53 55	$c = -0{,}3345 - 0{,}07805.t + 0{,}00894.t^2 - 0{,}000731.t^3$
	26 janvier...	20 36 40	$c = -1{,}0884 - 0{,}09030.t + 0{,}007985.t^2 + 0{,}000101.t^3$

C'est d'après ces formules qu'a été calculée, pour chaque jour et pour l'instant de chaque comparaison, la correction de la pendule chronographique, dont la différence avec la correction donnée par l'observation, pour cet instant, constitue l'écart qui est indiqué dans la dernière colonne des tableaux précédents. C'est également d'après ces formules qu'a été calculée la correction, qui a été appliquée à l'instant moyen d'une série d'oscillations du pendule, pour transformer en temps de la pendule nor-

male Dent l'instant donné par l'enregistrement en temps de la pendule chronographique.

Si l'on examine les écarts des tableaux ci-dessus, on voit que, dans un grand nombre de cas, ils dépassent très-notablement l'erreur moyenne, dont est affectée une comparaison, en la déduisant des erreurs accidentelles des signaux, qui ont concouru à la formation de chaque comparaison. Ces erreurs accidentelles peuvent provenir des causes suivantes : d'une erreur dans la perception par l'ouïe du battement de la pendule normale et dans le mouvement simultané du doigt sur le levier-clef; des erreurs mécaniques dans l'enregistrement électrique et dans le relevé des signaux. J'ai calculé pour chaque jour l'erreur moyenne d'un signal μ, d'après toutes les observations de ce jour, ainsi que l'erreur moyenne d'une comparaison m et l'écart moyen ε, entre la comparaison observée et la comparaison calculée, cet écart moyen étant déduit de la somme des carrés de tous les écarts pour ce jour. J'indique également le nombre total de signaux de comparaison pour chaque jour; ce nombre est notablement plus fort pour la deuxième série d'expériences, parce qu'il a été fait un plus grand nombre de comparaisons, et que chacune est déduite de 51 signaux, tandis qu'il n'y en avait, en général, que 31 pour les comparaisons de la première série.

Première série d'expériences.

Date.		Nombre de signaux.	μ	m	ε
			s	s	s
1864	20 novembre......	483	±0,034	±0,0053	±0,0170
	23 décembre......	482	0,042	0,0067	0,0138
1865	8 janvier........	369	0,034	0,0061	0,0101
	9 janvier........	367	0,032	0,0059	0,0107
	28 janvier........	372	0,034	0,0061	0,0086
	29 janvier........	458	0,031	0,0057	0,0089
	8 février........	433	0,034	0,0060	0,0112
	18 mars........	370	0,029	0,0053	0,0066
	29 mars........	372	0,033	0,0059	0,0057
	30 mars........	369	0,032	0,0058	0,0125
	17 avril........	371	0,031	0,0056	0,0080
	10 mai........	186	0,030	0,0054	0,0107
		4632	±0,033	±0,0058	±0,0103

Deuxième série d'expériences.

Date.		Nombre de signaux.	μ	m	ε
			s	s	s
1865	11 juin.........	816	±0,032	±0,0045	±0,0119
	12 juin.........	816	0,031	0,0044	0,0061
	26 octobre.......	816	0,036	0,0051	0,0138
	30 octobre.......	816	0,031	0,0044	0,0094
	13 novembre......	816	0,035	0,0049	0,0118
	17 novembre......	816	0,031	0,0044	0,0097
	20 décembre......	810	0,035.5	0,0050	0,0110
1866	25 janvier........	816	0,034	0,0047	0,0103
	26 janvier........	816	0,030	0,0042	0,0149
		7338	±0,032.8	±0,0046	±0,0110

Il résulte des chiffres de ce tableau, que l'erreur accidentelle d'un signal de comparaison des deux pendules est, à très-peu de chose près, la même dans les deux séries, c'est-à-dire de ± 0s,033, et elle varie fort peu d'un jour à l'autre, à l'exception du 23 décembre 1864, où sa valeur dépasse sensiblement celle de tous les autres jours. En faisant concourir 31 ou 41 signaux, comme dans la première série d'expériences, ou 51 comme dans la seconde, l'erreur moyenne d'une comparaison est réduite à ± 0s,0058, ou à ± 0s,0046, en tant qu'elle provient des erreurs et des irrégularités accidentelles des signaux dont on a pris la moyenne. Mais il s'en faut de beaucoup, que la formule calculée pour chaque jour représente les comparaisons de ce jour dans les limites de l'erreur moyenne dont elles sont affectées; effectivement, la valeur de ε dépasse notablement celle de m, à l'exception du 29 mars 1865, où elles sont égales, et du 18 mars et du 12 juin 1865, où la différence est très-peu considérable. La valeur moyenne de ε est de ± 0s,0103 pour la première série, et de ± 0s,0110 pour la deuxième; ainsi, lors même que dans cette dernière l'intervalle de temps, qui s'est écoulé pendant les comparaisons, est trois fois plus long que pour la première, les formules représentent presque aussi exactement les comparaisons, l'écart n'étant augmenté que de 0s,0007. Cette circonstance ne permet pas d'attribuer ces écarts à des variations dans la marche de la pendule chronographique, variations qui devraient être beaucoup plus sensibles

dans un intervalle de trois heures que dans l'espace d'une heure, et dont il a été tenu compte, du reste, en introduisant dans les formules des termes proportionnels au carré et au cube du temps. De plus, les irrégularités dans la marche d'une pendule, telles qu'elles peuvent être occasionnées par la résistance de l'interrupteur, ne se manifestent pas par des sauts brusques et irréguliers d'un instant à l'autre, mais par une accélération, ou un ralentissement alternatif de la marche dans des périodes assez longues, pour que l'introduction de termes proportionnels au carré et au cube du temps permettent d'en tenir compte. Si on examine la série des écarts pour les différents jours, on voit qu'ils ne suivent aucune loi, ou marche régulière, ni pour la grandeur, ni pour le signe; on trouve même des écarts très-différents de grandeur et de signe entre deux comparaisons consécutives, faites à quelques minutes d'intervalle.

Ces écarts doivent, par conséquent, être attribués à des causes pouvant produire des différences accidentelles et irrégulières d'une comparaison à l'autre, et dont les valeurs sont comprises entre certaines limites qui, pour un même jour, sont à peu près les mêmes dans l'intervalle de quelques minutes seulement, ou au bout de plusieurs heures. On peut indiquer deux causes donnant lieu à des erreurs de cette nature, savoir, une variation physiologique dans la manière de donner les signaux de comparaison, et des irrégularités accidentelles dans l'enregistrement chronographique. Il est facile de comprendre que, d'une comparaison à l'autre, il y ait une petite différence dans la manière dont l'observateur accompagne du mouvement du doigt sur le levier-clef les battements de la pendule normale; cette différence peut facilement s'élever à quelques millièmes de seconde, varier de grandeur d'un jour à l'autre, suivant la disposition physiologique de l'observateur, tout en restant comprise entre les mêmes limites pour toutes les comparaisons faites le même jour. La conséquence de ces petites variations physiologiques serait, que l'on obtient pour l'erreur moyenne d'une comparaison une valeur m un peu trop faible, si on la calcule par les écarts entre les

signaux dont cette comparaison est déduite, et qu'il faudrait l'augmenter un peu si l'on voulait tenir compte de ces variations; elles contribuent, en effet, à augmenter l'incertitude de chaque comparaison.

Si l'on voulait attribuer à cette cause la totalité des écarts observés, on aurait ainsi dans la première série d'expériences $\pm 0^s,0103$, pour l'erreur moyenne d'une comparaison, et $\pm 0^s,0110$ dans la seconde, et l'on n'aurait à redouter qu'une erreur presque insignifiante dans la transformation en temps de la pendule normale de l'intervalle relevé sur le chronographe entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations du pendule. Il résulte, en effet, des poids qui peuvent être attribués à la détermination des constantes, dans la résolution des équations de condition, que la transformation en temps de la pendule normale d'un intervalle chronographique serait affectée en moyenne d'une erreur de $\pm 0^s,0011$, pour l'intervalle de 6^m16^s, dans la première série d'expériences, et d'une erreur de $\pm 0^s,0019$, pour l'intervalle de 35^m30^s, dans la deuxième série d'expériences. L'on voit, par conséquent, que lors même que l'erreur moyenne d'une comparaison serait portée à un centième de seconde, par suite d'une variation physiologique dans la manière de donner les signaux, l'incertitude sur l'intervalle de temps de la pendule normale, compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations, ne s'élèverait pas au delà de un à deux millièmes de seconde.

Mais il est une autre cause qui peut donner lieu aux écarts entre la correction de la pendule chronographique calculée par la formule, pour l'instant d'une comparaison, et la correction déduite de la moyenne des signaux, ce sont les irrégularités et les imperfections de l'enregistrement chronographique. Il peut se faire d'abord, que, par suite d'une petite variation dans l'inertie des ancres des électro-aimants, ou de l'intensité des courants, l'attraction des ancres, qui produit le signal, n'ait pas lieu au moment même où le circuit est fermé, mais qu'il y ait un très-petit retard variable entre certaines limites. Ces variations, qui peuvent être sensibles lorsque les courants ont à traverser une assez grande distance,

d'une station à l'autre, le long d'une ligne télégraphique, doivent l'être beaucoup moins, lorsque le circuit est restreint dans l'enceinte d'un observatoire, où la longueur des fils est de quelques pieds seulement; aussi est-il peu probable que leur influence ait pu être appréciable. Mais la régularité de l'enregistrement chronographique peut aussi être troublée par de petites variations dans la position relative des deux plumes, qui tracent les signaux qu'il s'agit de comparer. Ces plumes ne peuvent pas être assujetties d'une manière assez invariable à l'anneau, qui les relie à l'ancre des électro-aimants pour qu'il soit possible d'empêcher un petit ébat, ou déplacement, pouvant s'élever à un ou deux dixièmes de millimètre. Les petites aspérités de la bande de papier, qui se meut sous la plume, peuvent occasionner ces déplacements, surtout au moment où l'ancre est attirée. Nous avions déjà reconnu ces petites variations dans la position relative, ou dans la parallaxe des plumes, à l'occasion des recherches que mon collègue M. Hirsch et moi avions entreprises, pour déterminer la vitesse de transmission des courants électriques entre Neuchâtel et Genève.

Dans ces recherches, les pendules des deux observatoires avaient été placées en communication avec la ligne télégraphique entre les deux stations, de façon à ce que chacune d'elles traçât simultanément sa marche sur le chronographe de Neuchâtel et sur celui de Genève; de la différence d'enregistrement sur les deux chronographes on pouvait déduire la vitesse de transmission des courants. Dans ces expériences, nous avons trouvé que la différence d'enregistrement ne restait pas toujours constante pendant un intervalle de deux minutes, et qu'il se présentait quelquefois des variations s'élevant jusqu'à un, deux ou trois centièmes de seconde, par conséquent très-supérieures à celles que l'on peut attribuer aux erreurs du relevé dans la moyenne d'un grand nombre de signaux. Nous n'avions pas hésité à attribuer ces irrégularités à des variations dans la parallaxe des plumes dans les expériences faites avec des courants induits; ces courants avaient, en effet, une intensité telle que, même dans la station éloignée, l'ancre de l'électro-

aimant était attirée avec une très-grande violence; la brusquerie et l'énergie de ces mouvements devaient faciliter un petit déplacement de l'extrémité de la plume. Lorsque les expériences avaient lieu avec des courants ordinaires de pile, pour lesquels nous pouvions constater, par suite du mauvais état d'isolation de la ligne, une diminution notable d'intensité dans le trajet de Neuchâtel à Genève, ou *vice versâ*, diminution d'intensité que nous ne pouvions pas supposer constante, nous avons attribué en partie à ces variations d'intensité les irrégularités dans l'enregistrement chronographique.

J'ai pu m'assurer par des expériences directes, que la parallaxe des plumes ne reste pas constante, lors même que l'attraction des ancres n'a pas lieu avec une énergie aussi grande, ni avec des mouvements aussi brusques, que ceux qui sont occasionnés par les courants induits. J'ai fait passer le courant, qui est alternativement ouvert et fermé par l'interrupteur de la pendule, par les deux électro-aimants du chronographe, de telle façon que les deux ancres fussent attirées simultanément, et que les deux plumes traçassent parallèlement la marche de la pendule chronographique. En comparant ainsi la position des signaux tracés par les deux plumes, l'ancre qui met chacune d'elles en mouvement étant attirée au même instant, on peut déterminer directement leur parallaxe, ou position relative, ainsi que les changements qui ont lieu dans leur parallaxe. Voici le résultat de ces expériences, faites le 1er et le 2 mai de cette année. Le chronographe était mis en mouvement pendant un intervalle de trois minutes environ, pendant lequel les deux plumes traçaient simultanément la marche de la pendule chronographique, ce qui donnait environ 90 signaux, puisque la fermeture du courant et l'attraction de l'ancre ont lieu à toutes les secondes paires; puis il était arrêté, et on le remettait de nouveau en mouvement pendant trois minutes, au bout d'un certain intervalle de temps, et ainsi de suite. Comme dans les observations de la durée des oscillations du pendule, le chronographe était alternativement arrêté et remis en mouvement, et comme dans la deuxième série d'expériences l'arrêt avait lieu entre le commencement

et la fin des oscillations, il importait de s'assurer si un petit changement de la parallaxe des plumes a lieu au moment, où le chronographe est remis en mouvement. Dans les observations qui suivent, j'ai réuni en un seul groupe tous les signaux consécutifs tracés à chaque seconde paire, pour lesquels la parallaxe des plumes n'avait pas changé d'une manière appréciable, que le chronographe ait été arrêté dans l'intervalle, ou non; j'ai déduit la parallaxe moyenne pour cet intervalle de temps en prenant la moyenne arithmétique de tous les signaux composant ce groupe, et j'ai ajouté l'erreur moyenne d'un signal et celle de la moyenne. La valeur de la parallaxe, ainsi que les erreurs, sont exprimées en fractions de millimètre, telles qu'elles sont données directement par la machine à relever; pour transformer ces fractions de millimètre en temps, il suffit de les diviser par 10,7 vu qu'une seconde sidérale correspond sur la bande chronographique à $10^{mm},70$.

Le signe positif de la parallaxe indique que la plume, qui enregistre dans les observations ordinaires la marche de la pendule chronographique et qui trace la ligne inférieure sur la bande de papier, est en avance sur l'autre; il faut, par conséquent, ajouter la parallaxe aux signaux tracés par cette dernière pour les faire coïncider avec ceux tracés par la première.

Détermination de la parallaxe des plumes.

1er mai 1866.

	Nombre de signaux.	Parallaxe moyenne.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.
		mm	mm	mm
de $5^h32^m20^s$ à $5^h34^m30^s$	96	+0,694	±0,07	±0,007
de 6 5 10 à 6 15 52	170	+0,630	0,06	0,005
de 6 45 0 à 6 46 24	43	+0,603	0,07	0,010
de 6 46 26 à 6 47 46	41	+0,718	0,05	0,008
de 6 53 10 à 6 54 16	34	+0,629	0,07	0,012
de 6 54 18 à 6 55 56	50	+0,700	0 06	0,008
de 7 26 40 à 7 27 10	16	+0,616	0,06	0,015
de 7 27 12 à 7 28 30	40	+0,701	0,05	0,008
de 7 28 32 à 7 34 30	44	+0,643	0,07	0,010
de 7 34 32 à 8 8 58	98	+0,718	0,05	0,005
de 8 9 0 à 8 10 46	54	+0,625	0,05	0,007
de 8 17 30 à 8 18 44	38	+0,729	0,05	0,009
de 8 18 46 à 8 20 16	46	+0,672	±0,06	±0,008

Détermination de la parallaxe des plumes.

2 mai 1866.

	Nombre de signaux.	Parallaxe moyenne.	Erreur moyenne d'un signal.	Erreur moyenne de la moyenne.
		mm	mm	mm
de $5^h21^m\ 0^s$ à $5^h21^m56^s$	29	+0,588	±0,05	±0,010
de 5 21 58 à 5 58 0	86	+0,662	0,05	0,005
de 5 58 2 à 5 59 8	34	+0,597	0,05	0,008
de 5 59 10 à 6 7 18	89	+0,662	0,05	0,005
de 6 40 0 à 6 41 36	49	+0,570	0,05	0,007
de 6 41 38 à 6 42 12	35	+0,660	0,04	0,006
de 7 31 0 à 7 33 46	84	+0,534	0,06	0,007
de 7 40 0 à 7 41 10	36	+0,500	0,06	0,010
de 7 41 12 à 7 42 46	48	+0,632	0,05	0,007
de 8 13 0 à 8 13 52	27	+0,518	0,05	0,009
de 8 13 54 à 8 14 32	20	+0,611	0,06	0,013
de 8 14 34 à 8 15 46	37	+0,549	0,04	0,007
de 8 22 0 à 8 23 50	56	+0,580	±0,06	±0,009

Des expériences du 1er mai il résulte que, sur huit fois où le chronographe a été remis en marche, après avoir été arrêté, il y a eu cinq cas dans lesquels ce moment a coïncidé avec un changement de parallaxe, et trois dans lesquels la parallaxe n'a pas changé, savoir de $6^h5^m10^s$ à $6^h15^m52^s$, de $7^h28^m32^s$ à $7^h34^m30^s$ et de $7^h34^m32^s$ à $8^h8^m58^s$. Dans les expériences du 2 mai, sur sept fois où le chronographe a été remis en marche, après avoir été arrêté, il y a eu cinq cas dans lesquels ce moment a coïncidé avec un changement de parallaxe, et deux dans lesquels la parallaxe n'a pas changé, savoir de $5^h21^m58^s$ à $5^h58^m0^s$ et de $5^h59^m10^s$ à $6^h7^m8^s$. Il paraît ainsi, que la petite secousse donnée à l'appareil, en remettant le chronographe en mouvement, produit le plus souvent un petit déplacement dans la position relative des deux plumes. Mais ce déplacement se produit également pendant que le chronographe est en mouvement, car sur les douze changements de parallaxe qui ont eu lieu dans les observations du 1er mai, il y en a eu sept qui se sont produits sans que le chronographe ait été arrêté, ou que l'on ait touché en aucune façon à l'appareil; ces changements ne peuvent être expliqués que par le frottement de la plume contre les aspérités du papier. On retrouve

exactement le même nombre et la même proportion dans les expériences du 2 mai.

La machine à relever est munie d'un vernier qui permet de déterminer, à un vingtième de millimètre près, la position du signal tracé par l'une des plumes; l'on voit par le chiffre de l'erreur moyenne d'un signal, pour les différents groupes, que ce degré de précision a été à peu près atteint dans la détermination de la position relative des deux signaux tracés simultanément par les deux plumes, et dans chaque groupe la valeur moyenne de la parallaxe est obtenue dans des limites d'erreur, qui sont fort au-dessous des changements de parallaxe survenus d'un groupe à l'autre. Ces changements de parallaxe d'un groupe à l'autre sont donnés ci-dessous pour les deux jours, en marquant d'un astérisque ceux qui se sont opérés pendant que le chronographe était en marche.

	1er mai.	2 mai.
	mm	mm
	—0,064	* +0,074
	—0,027	* —0,065
	* +0,115	* +0,065
	—0,089	—0,092
	* +0,071	* +0,090
	—0,084	—0,126
	* +0,085	—0,034
	* —0,058	* +0,132
	* +0,075	—0.114
	* —0,093	* +0,093
	+0,104	* —0,062
	* —0,057	+0,031
Moyennes	±0,088	±0,091

Le 1er mai, le changement moyen de parallaxe d'un groupe à l'autre a été ainsi de $\pm 0^{mm},088$, soit de $\pm 0^{s},0082$, et le 2 mai de $\pm 0^{mm},091$, soit de $\pm 0^{s},0085$.

Ces expériences permettent ainsi de constater une petite imperfection mécanique dans le procédé d'enregistrement, tel qu'il est réalisé par un chronographe construit comme celui de Genève. Les plumes qui servent à tracer, soit la marche de la pendule chronographique, soit les signaux

donnés pour l'observation d'un phénomène quelconque, ne peuvent pas être assujetties de telle façon qu'elles conservent invariablement la même position relative, soit parallaxe. La grandeur de l'ébat, ou du changement de parallaxe, dépasse quelquefois un dixième de millimètre, et sa valeur moyenne est d'environ $0^{mm},09$, soit de 8 à 9 millièmes de seconde. On doit ainsi s'attendre à trouver une incertitude de cet ordre dans l'enregistrement chronographique d'un phénomène quelconque, que ce soit la comparaison de la pendule normale avec la pendule chronographique, l'instant moyen du commencement ou de la fin d'une série d'oscillations du pendule, ou le passage d'une étoile au méridien. Cette imperfection dans l'enregistrement, qui peut donner lieu à une incertitude allant à un centième de seconde, est, comme on le comprend facilement, sans aucune importance pour les observations méridiennes d'étoiles, qui sont sujettes à des erreurs bien plus considérables; mais elle en a une très-grande dans les observations du pendule, dans lesquelles une incertitude d'un centième de seconde est une quantité très-sensible. On voit, en particulier, que l'on peut expliquer par cette cause la plus grande partie des écarts entre la correction de la pendule chronographique sur la pendule normale, calculée par la formule pour un certain instant, et celle qui résulte de la moyenne d'un certain nombre de signaux de comparaison, pour le même instant.

Une donnée qu'il importe beaucoup de connaître pour chaque jour d'observation, est l'erreur moyenne que l'on peut attribuer à la correction calculée pour un instant donné par la formule, qui permet de transformer en temps de la pendule normale un instant fourni par l'enregistrement chronographique. Cette erreur moyenne doit être plus petite que l'écart moyen ε résultant de la différence entre la correction calculée et la correction observée, puisque cet écart moyen est produit, en partie, par l'erreur moyenne m d'une comparaison et par la variation physiologique dans la manière de donner les signaux, d'une comparaison à l'autre. Comme cette dernière n'est pas connue, il est impossible de la faire entrer dans le calcul, et l'on doit calculer l'erreur moyenne E de

la correction, par laquelle la formule donne la transformation du temps chronographique en temps de la pendule normale, par $E = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$. Voici les valeurs de E pour les différents jours :

Première série d'expériences.

1864	20 novembre...	E = ±0,0161 s
	23 décembre...	0,0121
1865	8 janvier.....	0,0080
	9 janvier.....	0,0089
	28 janvier.....	0,0061
	29 janvier.....	0,0069
	8 février.....	0,0095
	18 mars.......	0,0040
	29 mars.......	0,0009
	30 mars.......	0,0111
	17 avril.......	0,0057
	10 mai........	0,0092

Deuxième série d'expériences.

1865	11 juin.......	E = ±0,0110 s
	12 juin........	0,0042
	26 octobre.....	0,0128
	30 octobre.....	0,0083
	13 novembre...	0,0107
	17 novembre...	0,0087
	20 décembre...	0,0098
1866	25 janvier......	0,0092
	26 janvier......	0,0143

Comme dans les observations du pendule, la réduction à la pendule normale de l'instant chronographique obtenu pour la moyenne des 100 passages du pendule par la verticale, au commencement des oscillations, est affectée d'une erreur moyenne $\pm E$, de même que celle de la moyenne des 100 passages, à la fin des oscillations, il en résultera sur la durée de l'intervalle de temps compris entre ces deux instants une incertitude probable égale à $\pm 0{,}6745\sqrt{2E^2}$. C'est d'après cette formule, et d'après la valeur de E pour chaque jour, que j'ai calculé l'incertitude sur l'intervalle compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations, pour la part de cette incertitude qui est due aux erreurs d'enregistrement, et de la transformation d'un intervalle chronographique en temps de la pendule normale.

§ 6.

Marche de la pendule normale Dent.

La marche de la pendule normale Dent sur le temps sidéral a été déduite des observations faites à la lunette méridienne par M. Bruderer;

elle a été obtenue, pour chaque jour d'observation des oscillations du pendule, par la comparaison d'un grand nombre d'étoiles (ordinairement de 15 à 20) observées deux jours consécutifs. Le 22 novembre 1864, la pendule a été démontée pour être nettoyée et pour rafraîchir les huiles, ce qui explique la variation dans la marche du 20 novembre au 23 décembre. La marche de la pendule Dent pendant vingt-quatre heures est donnée ci-dessous, pour chaque jour où les oscillations du pendule ont été observées, le signe + indiquant le retard diurne sur le temps sidéral et le signe — une avance.

		Marche diurne
		s
1864	20 novembre..........	—2,306
	23 décembre..........	+0,830
1865	8 janvier	+1,174
	9 janvier	+1,178
	28 janvier	+0,980
	29 janvier	+1,070
	8 février, ...	+1,346
	18 mars	+1,396
	29 mars	+1,706
	30 mars	+1,654
	17 avril	+0,244
	10 mai.	—0,220
	11 juin	+0,595
	12 juin	+0,630
	26 octobre............	+0,718
	30 octobre............	+0,742
	13 novembre..........	+0,710
	17 novembre..........	+0,744
	20 décembre..........	+0,660
1866	25 janvier............	+0,870
	26 janvier............	+0,838

C'est à l'aide de ces valeurs qu'a été calculée la correction qui a été appliquée aux intervalles exprimés en temps de la pendule Dent, pour les transformer en temps sidéral.

§ 7.

Observations des oscillations du pendule.

Le mode d'observation des passages du pendule par la verticale a déjà été expliqué; j'ajouterai seulement que, soit au commencement, soit à la fin d'une série d'oscillations, j'ai toujours eu soin de commencer l'observation des passages, lorsque le pendule traversait le champ de la lunette dans le même sens, c'est-à-dire de gauche à droite en apparence (en réalité du nord au sud). J'ai toujours observé un nombre égal de passages ayant lieu dans ce sens, et que j'avais désignés par passages impairs, et de passages pairs, dans lesquels le pendule traversait le champ de la lunette de droite à gauche en apparence. Il peut se faire que, par suite d'une petite imperfection dans le tracé du point de repère sur la monture du couteau, ou dans l'ajustement du fil vertical de la lunette du théodolithe sur ce point de repère, ce dernier ne passe pas derrière le fil de la lunette au moment précis, où le pendule se trouve dans la verticale. Il en résulterait, par conséquent, une petite accélération dans l'observation des passages impairs et un retard dans celle des passages pairs, ou *vice versâ*, ce qui donnerait une différence un peu plus grande, ou un peu moins grande, que la durée réelle d'une oscillation entre un passage pair et un passage impair consécutifs, ou bien entre un passage impair et un passage pair consécutifs; mais l'intervalle entre deux passages impairs, ou entre deux passages pairs consécutifs, sera égal au double de la durée d'une oscillation. On comprend facilement que cette cause d'erreur disparaît complétement, lorsqu'on détermine l'instant moyen du commencement et de la fin d'une série d'oscillations par la moyenne d'un nombre égal de passages impairs et de passages pairs. Pour l'éliminer dans la détermination de l'erreur accidentelle sur l'observation d'un passage, provenant des erreurs de la vue, de celles du mouvement du doigt sur le levier-clef, de celles de l'enregistrement et

du relevé, il suffit de comparer entre eux les passages impairs et les passages pairs. J'ai donc pris la moyenne arithmétique de tous les passages impairs, et celle de tous les passages pairs, au commencement et à la fin d'une série d'oscillations; l'intervalle compris entre le commencement et la fin divisé par le nombre des passages donnait la durée approchée d'une oscillation, à l'aide de laquelle chaque passage impair, ou chaque passage pair, était réduit à la moyenne. J'obtenais ainsi l'écart, ou l'erreur moyenne d'un passage impair et d'un passage pair, et, par suite, l'erreur moyenne de la moyenne des passages observés au commencement et à la fin de la série.

Ces erreurs sont données dans les tableaux suivants pour l'instant moyen du commencement et de la fin d'une série d'oscillations, tel qu'il résulte du relevé chronographique. Dans la colonne suivante se trouve la correction, qu'il faut appliquer à cet instant pour le transformer en temps de la pendule normale Dent; cette correction a été calculée d'après les formules du § 5. Les deux dernières colonnes donnent, soit pour le commencement, soit pour la fin de la série d'oscillations, la température accusée par un thermomètre suspendu au centre de l'appareil et dont la boule se trouvait au milieu de la tige du pendule, enfin l'amplitude, ou plutôt la demi-amplitude, soit l'arc compris entre la verticale et l'excursion extrême du pendule. Le mode de suspension du pendule dans chaque expérience est indiqué dans la première colonne, suivant la désignation qui a été expliquée plus haut, et le mode d'ajustement des couteaux est ajouté à la date.

Première série d'expériences : courts intervalles.

Mode de suspension.	Nombre des passages observés au commencement et à la fin.	Passage moyen, pendule chronographique.	Erreur moyenne — d'un passage	Erreur moyenne — de la moyenne	Réduction à la pendule Dent.	Tempé-rature.	Ampli-tude.
20 novembre 1864. Ajustement A des couteaux. Baromètre 724 mm.							
			s	s	s	°	°
R. O. haut	66 commencem[t]	$18^h34^m15^s$,3928	±0,028	±0,0035	+0,3704	+7,4	1 15′
	86 fin	40 38 ,1910	,024	,0026	+ ,2827	+7,4	1 15
R. E. haut	58 commencem[t]	18 48 1 ,8805	,031	,0041	+ ,1833	+7,4	1 15
	70 fin	53 24 ,4253	,030	,0036	+ ,1124	+7,4	1 15
R. E. bas	90 commencem[t]	19 1 25 ,6095	,022	,0023	+ ,0091	+7,4	1 15
	62 fin	7 51 ,5232	,028	,0036	— ,0717	+7,4	1 15
R. O. bas	66 commencem[t]	19 14 51 ,9208	,019	,0023	— ,1576	+7,4	1 15
	66 fin	21 10 ,2687	,027	,0034	— ,2332	+7,4	1 15
23 Décembre 1864. Ajustement A des couteaux. Baromètre 725mm.							
R. O. haut	100 commencem[t]	18 44 47 ,7918	,040	,0040	+ ,4034	+2,0	1 45
	100 fin	50 44 ,8833	,029	,0029	+ ,4088	+1,8	1 40
R. E. haut	100 commencem[t]	19 3 16 ,9505	,039	,0039	+ ,4199	+1,8	1 20
	100 fin	9 17 ,0533	,033	,0033	+ ,4251	+1,7	1 15
R. E. bas	100 commencem[t]	19 29 51 ,0079	,037	,0037	+ ,4424	+1,8	1 0
	100 fin	35 42 ,1423	,026	,0026	+ ,4471	+1,7	0 55
R. O. bas	100 commencem[t]	19 44 13 ,4962	,031	,0031	+ ,4538	+1,8	1 10
	100 fin	50 13 ,6176	,040	,0040	+ ,4584	+1,8	1 10
8 Janvier 1865. Ajustement B des couteaux. Baromètre 732mm.							
R. O. haut	100 commencem[t]	18 39 27 ,3462	,036	,0036	+ ,3245	+3,7	1 20
	100 fin	45 40 ,9342	,041	,0041	+ ,3496	+3,7	1 10
R. E. haut	100 commencem[t]	18 54 45 ,7197	,021	,0021	+ ,3880	+3,7	1 20
	100 fin	19 0 53 ,3439	,028	,0028	+ ,4151	+3,8	1 15
R. E. bas	100 commencem[t]	19 9 16 ,7953	,031	,0031	+ ,4540	+3,8	1 10
	100 fin	15 22 ,9782	,030	,0030	+ ,4835	+3,9	1 0
R. O. bas	100 commencem[t]	19 31 29 ,3442	,025	,0025	+ ,5662	+4,0	1 15
	100 fin	37 38 ,5115	,023	,0023	+ ,5996	+4,0	1 5
9 Janvier 1865. Ajustement B des couteaux. Baromètre 729mm.							
R. E. bas	100 commencem[t]	18 47 27 ,0630	,024	,0024	+ ,6897	+4,4	1 10
	100 fin	53 43 ,7807	,026	,0026	+ ,7304	+4,5	1 0
R. O. bas	100 commencem[t]	19 1 49 ,3099	,026	,0026	+ ,7864	+4,5	1 10
	100 fin	8 1 ,4646	,028	,0028	+ ,8322	+4,7	1 0
R. O. haut	100 commencem[t]	19 15 47 ,5597	,047	,0047	+ ,8928	+4,7	1 30
	100 fin	22 4 ,1917	,030	,0030	+0,9449	+5,1	1 20
R. E. haut	100 commencem[t]	19 31 17 ,4413	,025	,0025	+1,0251	+5,1	1 30
	100 fin	37 34 ,0775	,034	,0034	+1,0830	+5,2	1 20

Première série d'expériences : courts intervalles.

Mode de suspension.	Nombre des passages observés au commencement et à la fin.	Passage moyen pendule chronographique.	Erreur moyenne		Réduction à la pendule Dent.	Tempé-rature.	Ampli-tude.
			d'un passage	de la moyenne			
28 Janvier 1865. Ajustement B des couteaux. Baromètre 719mm.							
			s	s	s	o	o
R. O. haut	100 commencemt	22h26m52s,0761	±0,039	±0,0039	+1,0607	+7,5	1 25′
	100 fin	33 8 ,7355	,032	,0032	+1,0846	+7,3	1 20
R. O. bas	100 commencemt	22 40 47 ,5341	,025	,0025	+1,1090	+7,3	1 45
	100 fin	47 4 ,2914	,028	,0028	+1,1252	+7,3	1 30
R. E. bas	100 commencemt	22 56 9 ,4945	,022	,0022	+1,1422	+7,3	1 45
	100 fin	23 2 26 ,2589	,030	,0030	+1,1496	+7,4	1 30
29 Janvier 1865. Ajustement C des couteaux. Baromètre 725mm.							
R. E. bas	100 commencemt	19 46 56 ,1815	,025	,0025	+0,0960	+5,3	1 30
	100 fin	53 12 ,9167	,040	,0040	+0,1092	+5,3	1 15
R. O. bas	100 commencemt	20 0 17 ,4941	,033	,0033	+0,1246	+5,3	1 25
	100 fin	6 34 ,2264	,039	,0039	+0,1388	+5,3	1 10
R. O. haut	100 commencemt	20 13 56 ,4062	,027	,0027	+0,1560	+5,3	1 30
	100 fin	21 17 ,8523	,029	,0029	+0,1739	+5,4	1 20
R. O. haut	100 commencemt	20 29 45 ,6017	,027	,0027	+0,1951	+5,4	1 35
	100 fin	36 2 ,2790	,027	,0027	+0,2115	+5,5	1 30
R. E. haut	100 commencemt	20 44 23 ,2153	,030	,0030	+0,2339	+5,5	1 35
	100 fin	50 39 ,8772	,031	,0031	+0,2514	+5,5	1 30
8 Février 1865. Ajustement C des couteaux. Baromètre 726mm.							
R. O. haut	100 commencemt	22 38 34 ,9091	,023	,0023	—0,2313	+5,5	1 20
	28 fin	44 24 ,4425	,029	,0056	—0,2144	+5,6	1 12
R. E. haut	100 commencemt	22 58 49 ,5996	,027	,0027	—0,1713	+5,6	1 35
	28 fin	23 4 36 ,1586	,033	,0062	—0,1534	+5,5	1 30
R. E. bas	100 commencemt	23 56 35 ,7421	,029	,0029	—0,0677	+5,3	1 30
	100 fin	0 2 52 ,5024	,028	,0028	—0,0444	+5,2	1 15
R. O. bas	100 commencemt	0 11 17 ,5068	,024	,0024	—0,0129	+5,2	1 30
	100 fin	17 34 ,2320	,023	,0023	+0,0112	+5,2	1 15
18 Mars 1865. Ajustement C des couteaux. Baromètre 725mm.							
R. E. haut	100 commencemt	0 57 51 ,2286	,029	,0029	+0,1535	+6,7	1 45
	100 fin	1 4 7 ,9042	,034	,0034	+0,1435	+6,8	1 30
R. O. haut	100 commencemt	1 14 48 ,6290	,028	,0028	+0,1293	+6,8	1 40
	100 fin	21 5 ,3326	,028	,0028	+0,1226	+6,7	1 30
R. O. bas	100 commencemt	1 29 56 ,8514	,024	,0024	+0,1153	+6,7	1 30
	100 fin	36 13 ,5922	,033	,0033	+0,1116	+6,8	1 15
R. E. bas	100 commencemt	1 45 25 ,5910	,018	,0018	+0,1085	+6,8	1 35
	100 fin	51 42 ,3425	,027	,0027	+0,1078	+6,7	1 20

Première série d'expériences: courts intervalles.

Mode de suspension	Nombre des passages observés au commencement et à la fin.	Passage moyen pendule chronographique.	Erreur moyenne: d'un passage	Erreur moyenne: de la moyenne	Réduction à la pendule Dent.	Tempé-rature.	Ampli-tude.
29 Mars 1865. Ajustement D des couteaux. Baromètre 725^mm^.							
			s	s	s	o	o
R. E. haut	100 commencem^t^	0^h^ 1^m^ 2^s^,7669	±0,032	±0,0032	+0,3346	+1,8	1 45'
	100 fin	7 19 ,4317	,038	,0038	+0,3224	+1,6	1 35
R. O. haut	100 commencem^t^	0 16 20 ,4263	,026	,0026	+0,3028	+1,6	1 45
	100 fin	22 37 ,0892	,021	,0021	+0,2878	+1,8	1 35
R. O. bas	100 commencem^t^	0 31 3 ,3441	,025	,0025	+0,2659	+1,8	1 40
	100 fin	37 20 ,1106	,033	,0033	+0,2483	+1,9	1 20
R. O. bas	100 commencem^t^	0 47 48 ,7794	,029	,0029	+0,2163	+1,9	1 50
	100 fin	54 5 ,5414	,030	,0030	+0,1957	+2,0	1 40
30 Mars 1865. Ajustement D des couteaux. Baromètre 726^mm^.							
R. E. bas	100 commencem^t^	1 45 27 ,4620	,029	,0029	—0,2992	+2,9	1 30
	100 fin	51 44 ,2292	,026	,0026	—0,3219	+2,8	1 15
R. O. bas	100 commencem^t^	1 59 55 ,4932	,022	,0022	—0,3468	+2,8	1 30
	100 fin	2 6 12 ,2666	,025	,0025	—0,3623	+2,8	1 15
R. O. haut	100 commencem^t^	2 13 52 ,8997	,029	,0029	—0,3771	+2,8	1 35
	100 fin	20 9 ,5900	,029	,0029	—0,3858	+2,7	1 25
R. E. haut	100 commencem^t^	2 27 50 ,9570	,029	,0029	— 0,3923	+2,7	1 30
	100 fin	34 7 ,6086	,023	,0023	—0,3941	+2,6	1 15
17 Avril 1865. Ajustement D des couteaux. Baromètre 727^mm^.							
R. E. haut	100 commencem^t^	3 54 50 ,6196	,019	,0019	+0,7554	+16,3	1 30
	100 fin	4 1 7 ,3906	,025	,0025	+0,7034	+16,4	1 20
R. O. haut	100 commencem^t^	4 8 21 ,6393	,019	,0019	+0,6444	+16,4	1 30
	100 fin	14 38 ,4380	,026	,0026	+0,5941	+16,4	1 20
R. O. bas	100 commencem^t^	4 22 27 ,1011	,020	,0020	+0,5324	+16,4	1 45
	100 fin	28 43 ,9467	,025	,0025	+0,4837	+16,4	1 25
R. E. bas	100 commencem^t^	5 1 18 ,6783	,020	,0020	+0,3109	+16,4	1 45
	100 fin	7 35 ,4887	,020	,0020	+0,2667	+16,4	1 30
10 Mai 1865. Ajustement D des couteaux. Baromètre 718^mm^.							
R. E. bas	100 commencem^t^	2 31 44 ,0668	,025	,0025	—0,3243	+18,9	1 20
	100 fin	38 0 ,8671	,027	,0027	—0,3249	+18,9	1 5
R. E. haut	100 commencem^t^	3 10 20 ,9809	,034	,0034	—0,3711	+19,0	1 20
	100 fin	16 37 ,7142	,030	,0030	—0,3885	+19,1	1 10

Deuxième série d'expériences: longs intervalles.

Mode de suspension	Nombre des passages observés au commencement et à la fin.	Passage moyen pendule chronographique.	Erreur moyenne		Réduction à la pendule Dent.	Température.	Amplitude.
			d'un passage	de la moyenne			
11 Juin 1865. Ajustement D des couteaux. Baromètre 727mm.							
			s	s	s	°	° ′
R. O. haut	100 commencemt	3h44m50s,0253	±0,023	±0,0023	—0,6418	+21,8	1 33,5
	100 fin	4 20 20 ,9899	,023	,0023	—0,7923	+22,2	1 3,0
R. E. haut	100 commencemt	4 32 21 ,4724	,019	,0019	—0,8443	+22,3	1 37,5
	100 fin	5 7 52 ,4229	,019	,0019	—0,9955	+22,4	1 2,5
R. E. bas	100 commencemt	5 21 39 ,1563	,021	,0021	—1,0513	+22,5	1 25,5
	100 fin	5 57 10 ,5106	,023	,0023	—1,1819	+22,6	0 38,0
R. O. bas	100 commencemt	6 11 37 ,4955	,020	,0020	—1,2275	+22,6	1 35,0
	100 fin	6 47 8 ,7945	,018	,0018	—1,3149	+22,6	0 43,5
12 Juin 1865. Ajustement D des couteaux. Baromètre 730mm.							
R. O. haut	100 commencemt	6 35 51 ,8450	,025	,0025	—0,8028	+19,6	1 37,0
	100 fin	7 11 22 ,7398	,021	,0021	—0,9315	+19,8	1 2,5
R. E. haut	100 commencemt	7 22 21 ,5280	,022	,0022	—0,9679	+19,9	1 36,5
	100 fin	7 57 52 ,3916	,022	,0022	—1,0763	+19,9	1 3,0
R. E. bas	100 commencemt	8 9 50 ,8108	,026	,0026	—1,1100	+19,9	1 44,0
	100 fin	8 45 22 ,0710	,042	,0042	—1,2033	+19,8	0 48,5
R. O. bas	100 commencemt	8 56 49 ,8275	,027	,0027	—1,2316	+19,8	1 31,5
	100 fin	9 32 21 ,0988	,028	,0028	—1,3154	+19,8	0 42,5
26 Octobre 1865. Ajustement C des couteaux. Baromètre 727mm.							
R. O. haut	100 commencemt	14 47 18 ,7120	,028	,0028	+0,1773	+13,9	1 43,0
	100 fin	15 22 49 ,2931	,027	,0027	+0,2555	+14,2	1 8,5
R. E. haut	100 commencemt	15 47 49 ,2106	,019	,0019	+0,3134	+14,4	1 37,5
	100 fin	16 23 19 ,7534	,021	,0021	+0,4008	+14,5	1 2,5
R. E. bas	100 commencemt	16 34 44 ,9700	,022	,0022	+0,4305	+14,5	1 41,0
	100 fin	17 10 15 ,9742	,018	,0018	+0,5281	+14,4	0 48,0
R. O. bas	100 commencemt	17 22 47 ,0040	,023	,0023	+0,5647	+14,4	1 44,5
	100 fin	17 58 17 ,9504	,028	,0028	+0,6756	+14,2	0 47,0
30 Octobre 1865. Ajustement C des couteaux. Baromètre 720mm.							
R. O. haut	100 commencemt	13 51 50 ,2404	,021	,0021	—0,7555	+12,6	1 46,0
	100 fin	14 27 20 ,9026	,024	,0024	—0,7822	+13,2	1 6,5
R. E. haut	100 commencemt	14 37 50 ,8745	,021	,0021	—0,8021	+13,3	1 35,5
	100 fin	15 13 21 ,5975	,020	,0020	—0,8965	+13,8	1 0,5
R. E. bas	100 commencemt	15 24 47 ,5855	,022	,0022	—0,9326	+14,0	1 43,5
	100 fin	16 0 18 ,7383	,018	,0018	—1,0491	+13,3	0 44,5
R. O. bas	100 commencemt	16 12 47 ,1186	,026	,0026	—1,0879	+13,4	1 43,0
	100 fin	16 48 18 ,2221	,026	,0026	—1,1779	+12,9	0 47,5

Deuxième série d'expériences : longs intervalles.

Mode de suspension	Nombre des passages observés au commencement et à la fin.	Passage moyen pendule chronographique.	Erreur moyenne d'un passage	Erreur moyenne de la moyenne	Réduction à la pendule Dent.	Tempé-rature.	Ampli-tude.
13 Novembre 1865. Ajustement B des couteaux. Baromètre 735mm.							
			s	s	s	°	° ′
R. E. haut	100 commencemt	14m30h53s,2121	±0,032	±0,0032	—0,2924	+6,9	1 52,0
	100 fin	15 6 23 ,7061	,020	,0020	—0,2789	+7,0	1 12,0
R. O. haut	100 commencemt	15 17 51 ,2432	,024	,0024	—0,2625	+7,1	1 13,0
	100 fin	15 53 21 ,6750	,024	,0024	—0,1852	+7,4	0 47,5
R. O. bas	100 commencemt	16 4 46 ,9039	,028	,0028	—0,1542	+7,6	1 37,0
	100 fin	16 40 17 ,6887	,023	,0023	—0,0489	+7,6	0 43,0
R. E. bas	100 commencemt	16 52 44 ,4472	,033	,0033	—0,0115	+7,6	1 39,0
	100 fin	17 28 15 ,2366	,024	,0024	+0,0857	+7,6	0 45,0
17 Novembre 1865. Ajustement B des couteaux. Baromètre 733mm.							
R. E. haut	100 commencemt	14 47 45 ,6629	,024	,0024	+0,2026	+5,9	1 17,0
	100 fin	15 23 16 ,2148	,026	,0026	+0,1241	+6,0	0 52,0
R. O. haut	100 commencemt	15 36 49 ,4735	,027	,0027	+0,1233	+6,0	1 58,5
	100 fin	16 12 20 ,0992	,021	,0021	+0,0182	+6,0	1 16,5
R. O. bas	100 commencemt	16 23 45 ,2365	,023	,0023	—0,0139	+6,0	1 42,5
	100 fin	16 59 16 ,1665	,019	,0019	—0,0944	+6,0	0 45,0
R. E. bas	100 commencemt	17 10 45 ,1192	,024	,0024	—0,1108	+6,0	1 35,0
	100 fin	17 46 15 ,9769	,021	,0021	—0,1178	+6,0	0 43,0
20 Décembre 1865. Ajustement A des couteaux. Baromètre 736mm							
R. E. haut	100 commencemt	17 13 16 ,6218	,025	,0025	—0,3211	+2,2	1 47,5
	100 fin	17 48 46 ,9510	,029	,0029	—0,2377	+2,4	1 7,0
R. O. haut	100 commencemt	18 1 17 ,3580	,025	,0025	—0,2117	+2,6	1 14,5
	100 fin	18 36 47 ,6515	,024	,0024	—0,1475	+2,6	0 48,5
R. O. bas	100 commencemt	18 51 16 ,1920	,029	,0029	—0,1404	+2,6	1 40 5
	100 fin	19 26 46 ,9404	,025	,0025	—0,0964	+2,5	0 42,5
R. E. bas	100 commencemt	19 38 48 ,0169	,021	,0021	—0,0848	+2,5	1 45,5
	100 fin	20 14 18 ,7607	,025	,0025	—0,0601	+2,5	0 45,5
25 Janvier 1866. Ajustement A des couteaux. Baromètre 740mm.							
R. O. haut	100 commencemt	21 23 51 ,6643	,019	,0019	+0,0003	+7,2	2 1,0
	100 fin	21 59 22 ,3698	,024	,0024	—0,1587	+7,3	1 17,0
R. E. haut	100 commencemt	22 12 49 ,0042	,023	,0023	—0,2089	+7,3	1 13,0
	100 fin	22 48 19 ,5822	,023	,0023	—0,3196	+7,1	0 48,5
R. E. bas	100 commencemt	22 59 48 ,1602	,023	,0023	—0,3495	+7,1	1 48,0
	100 fin	23 35 19 ,1084	,021	,0021	—0,4271	+6,8	0 50,0
R. O. bas	100 commencemt	23 47 45 ,7033	,020	,0020	—0,4500	+6,8	1 44,5
	100 fin	0 23 16 ,6537	,022	,0022	—0,5070	+6,6	0 48,0

Deuxième série d'expériences : longs intervalles.

Mode de suspension.	Nombre des passages observés au commencement et à la fin.	Passage moyen pendule chronographique.	Erreur moyenne d'un passage	Erreur moyenne de la moyenne	Réduction à la pendule Dent.	Température.	Amplitude.
26 janvier 1866. Ajustement A des couteaux. Baromètre 740^{mm}.							
			s	s	s	°	° ′
R. E. haut	100 commencem^t	19^h 7^{m}48^s,3056	±0,028	±0,0028	—0,7495	+6,6	1 46,5
	100 fin	19 43 18 ,9386	,022	,0022	—0,9031	+6,8	1 7,5
R. O. haut	100 commencem^t	19 54 53 ,3633	,019	,0019	—0,9474	+6,9	1 8,0
	100 fin	20 30 23 ,9669	,020	,0020	—1,0692	+7,3	0 45,5
R. O. bas	100 commencem^t	20 42 52 ,4196	,017	,0017	—1,1067	+7,3	1 39,0
	100 fin	21 18 23 ,4380	,021	,0021	—1,1982	+7,6	0 47,5
R. E. bas	100 commencem^t	21 29 52 ,4663	,020	,0020	—1,2229	+7,6	1 48,5
	100 fin	22 5 23 ,4549	,026	,0026	—1,2830	+7,5	0 50,0

Si on relève pour chaque jour d'observation l'erreur moyenne dans l'observation d'un passage, on trouve :

Première série d'expériences.

		Nombre de signaux.	s
1864	20 novembre..	564	±0,026
	23 décembre..	800	0,035
1865	8 janvier....	800	0,030
	9 janvier....	800	0,030
	28 janvier....	600	0,029
	29 janvier....	1000	0,031
	8 février....	656	0,027
	18 mars.....	800	0,028
	29 mars.....	800	0,029
	30 mars.....	800	0,027
	17 avril......	800	0,022
	10 mai......	400	0,029
		8820	±0,028.5

Deuxième série d'expériences.

		Nombre de signaux.	s
1865	11 juin.......	800	±0,021
	12 juin.......	800	0,027
	26 octobre....	800	0,023
	30 octobre....	800	0,022
	13 novembre..	800	0,026
	17 novembre..	800	0,023
	20 décembre..	800	0,026
1866	25 janvier....	800	0,022
	26 janvier....	800	0,022
		7200	±0,023.5

Ainsi, dans la première série d'expériences, d'après l'observation de 8820 passages du pendule par la verticale, l'erreur moyenne sur un

passage est de $\pm 0^s,0285$, et l'erreur probable de $\pm 0^s,0192$; dans la seconde série, l'erreur est un peu moindre, sur 7200 passages observés, on trouve pour erreur moyenne $\pm 0^s,0235$ et pour erreur probable $\pm 0^s,016$.

§ 8.

Réduction des observations des oscillations.

Si l'on ajoute à l'instant chronographique du commencement et de la fin d'une série d'oscillations la réduction à la pendule normale Dent, donnée dans les tableaux précédents, on obtient par la soustraction l'intervalle en temps de la pendule normale employé pour un certain nombre d'oscillations. Cet intervalle doit être réduit en temps sidéral à l'aide de la marche de la pendule normale, donnée, pour chaque jour, dans le § 6. L'incertitude probable, qui doit être attribuée à cet intervalle de temps, peut être calculée en tenant compte des différentes causes qui peuvent la produire, savoir : erreur sur la marche de la pendule normale, erreur sur la réduction d'un instant chronographique à la pendule normale, enfin erreurs accidentelles dans l'observation du passage du pendule par la verticale, au commencement et à la fin de la série.

Je n'ai pas tenu compte des erreurs sur la marche de la pendule normale, parce que leur influence n'aurait pas été appréciable, même dans la seconde série d'expériences, pour un intervalle de $35 \frac{1}{2}$ minutes. Pour aucun des jours d'observation, l'erreur sur la marche de la pendule normale dans vingt-quatre heures ne peut être évaluée au delà de quelques centièmes de seconde; il n'en résulterait par conséquent sur un intervalle de $35 \frac{1}{2}$ minutes, comme dans la seconde série d'expériences, qu'une erreur s'élevant, au plus, à un ou deux millièmes de seconde. J'ai donné au § 5 l'erreur moyenne E que l'on peut attribuer, pour chaque jour, à la réduction d'un instant chronographique en temps de la pendule normale; si l'on désigne par $\pm m$ l'erreur moyenne de la

moyenne des passages observés au commencement, et par $\pm m'$ celle de la moyenne des passages observés à la fin d'une série d'oscillations, on obtiendra pour l'incertitude probable d'un intervalle de temps

$$\pm 0{,}6745 \sqrt{2E^2 + m^2 + m'^2}$$

C'est la formule dont je me suis servi pour calculer l'incertitude sur un intervalle de temps, employé pour un certain nombre d'oscillations, en tant qu'elle provient des erreurs fortuites d'observation et des imperfections de l'enregistrement chronographique.

La durée d'une oscillation directement déterminée par l'observation doit subir deux corrections ou réductions : l'une, dépendant de la température, à laquelle la durée a été observée, l'autre, de l'amplitude de l'oscillation. Comme c'est à la température de $16° \, {}^1/_4$ que la distance entre les couteaux a la longueur exprimée par le nombre de lignes trouvé dans le chapitre précédent, c'est aussi à cette température qu'il faut réduire la durée d'une oscillation, au moyen du coefficient de dilatation du pendule. Ainsi que je l'ai expliqué, j'ai pris provisoirement, pour effectuer cette réduction, et en attendant une détermination directe, le coefficient trouvé par Lavoisier et Laplace, savoir 0,00001878. Avec l'adoption de ce coefficient, la réduction de la durée t d'une oscillation observée à une température T, à la température $+16° \, {}^1/_4$, se calcule par la formule $- t\,(0{,}00000959)\,(T - 16° \, {}^1/_4)$.

La réduction à l'arc infiniment petit, en supposant le pendule oscillant dans le vide, de la durée t d'une oscillation observée à une amplitude α, est donnée par la formule connue : $- t\left(\frac{\alpha^2}{32}\right)$. Dans la première série d'expériences, pour laquelle l'intervalle entre le commencement et la fin des oscillations était d'un petit nombre de minutes, et pour laquelle il n'y avait qu'une petite différence dans l'amplitude, à ces deux instants, j'ai calculé la correction avec la valeur de α au commencement, et avec celle à la fin des oscillations, et j'ai pris la moyenne des deux résultats pour la correction à appliquer. Dans la seconde série d'expériences, où le pendule oscillait pendant un intervalle beaucoup plus long, le dé-

croissement de l'amplitude était très-considérable, et comme il n'est pas proportionnel au temps, l'on n'aurait pas obtenu la correction avec une précision suffisante, si on s'était borné à prendre la demi-somme des résultats calculés avec l'amplitude observée au commencement et à la fin des oscillations.

J'ai observé, par conséquent, l'amplitude à des intervalles de temps égaux, de six minutes chacun, pendant toute la durée des oscillations; la première observation était faite deux à trois minutes avant le commencement des observations du passage du pendule par la verticale, et la dernière, deux à trois minutes après la fin des passages. Il était facile de déduire par interpolation, de ces observations, l'amplitude pour l'instant du commencement des oscillations, pour celui de la fin et pour un certain nombre d'instants équidistants dans l'intervalle (j'en ai pris cinq). La correction pour l'amplitude était calculée pour chacun de ces sept instants, et l'on en a déduit, par suite, la correction moyenne pour toute la durée des oscillations, ainsi que l'amplitude moyenne.

Je donne plus bas, pour chaque jour, ces observations de l'amplitude faites à des intervalles de six minutes, en indiquant séparément les résultats obtenus lorsque le disque plein était en haut, le pendule reposant ainsi sur le couteau le plus rapproché du centre de gravité, et ceux qui ont été obtenus dans la position inverse, le disque plein étant en bas; dans le dernier cas, le décroissement de l'amplitude est près de deux fois plus lent que dans le premier. Cette circonstance m'a permis de faire varier l'amplitude initiale, et, par suite, l'amplitude moyenne, dans des limites beaucoup plus étendues lorsque le disque plein était en bas, que lorsqu'il était en haut. Il n'était pas sans intérêt de faire varier l'amplitude, du moins dans l'un des modes de suspension du pendule, entre des limites un peu étendues, et de comparer dans ces différentes alternatives la durée de l'oscillation, après avoir appliqué la réduction à l'arc infiniment petit pour un pendule oscillant dans le vide. Il résulte, en effet, des recherches de M. Cellérier sur la théorie du pendule à réversion, que si on désigne par T et par T′ les durées d'une

oscillation dans les deux modes de suspension, celles-ci étant déjà réduites à l'arc infiniment petit, on a les formules :

$$T=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}\left(1+\frac{\gamma}{h}\right)};\quad T'=\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}\left(1+\frac{\gamma}{h'}\right)}$$

h est la distance du centre de gravité au couteau le plus rapproché, et T la durée de l'oscillation lorsque le pendule est suspendu par ce couteau ; h' est la distance du centre de gravité au couteau le plus éloigné, et T′ la durée de l'oscillation lorsque le pendule est suspendu par ce couteau ; λ est la distance qui sépare les deux couteaux, soit $h+h'$; enfin γ est la somme de différents termes $\beta+\beta'$, dont l'un β' est dû à une imperfection de l'appareil, et à ce que les couteaux ne sont pas exactement des centres d'oscillation réciproques, et les autres désignés collectivement par β sont dus à l'action des différentes forces troublantes, comme la poussée, ou la diminution du poids du pendule dans l'air, l'action des remous, ou de l'agitation de l'air produite par le mouvement du pendule, l'influence du frottement des couteaux sur le plan de suspension, etc. Quelques-uns de ces termes dépendent de la vitesse du mouvement, et, par suite, de l'amplitude de l'oscillation, mais suivant une loi inconnue, d'où résulte que, pour que γ soit exactement le même dans la valeur de T et dans celle de T′, il importe que l'amplitude soit la même dans les deux modes de suspension. Dans ce cas, on peut obtenir directement γ par la comparaison des durées observées T et T′, puisque l'on a :

$$\gamma=\frac{T-T'}{T}\cdot\frac{2\,hh'}{h'-h}.$$

Lorsque le pendule oscille pendant un intervalle de temps un peu long, il est impossible, vu la très-grande différence dans le décroissement de l'amplitude, dans les deux modes de suspension, de faire en sorte que l'amplitude soit la même dans les deux cas. Le décroissement beaucoup plus lent de l'amplitude, lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, permettait de faire varier l'amplitude initiale dans des limites très-étendues dans les deux expé-

riences faites le même jour, suivant ce mode de suspension ; on a ainsi un moyen de comparer entre elles deux valeurs de T′, dans lesquelles l'amplitude est très-différente, et d'apprécier, par suite, l'influence de l'amplitude sur la valeur de T′. Afin de faciliter la comparaison du décroissement de l'amplitude dans les différentes observations du tableau suivant, j'ai placé sur des lignes à différentes hauteurs le chiffre se rapportant à l'amplitude initiale, suivant que celle-ci était plus ou moins considérable.

Observations de l'amplitude des oscillations faites de six minutes en six minutes.

1865														1866			
11 juin		12 juin		26 octobre		30 octobre		13 novemb.		17 novemb.		20 décemb.		25 janvier		26 janvier	
RO	RE	RO	RE	RO	RE	RO	RE	RO	RE	RO	RE	RO	RE	RO	RE	RO	RE
1° Disque plein en haut.																	
			1°50′	1°50′	1°47′	1°48′	1°50′			1°48′			1°52′	1°50′	1°54′		1°55′
1°40′		1°37′	1 35	1 36	1 30	1 35	1 34	1°43′	1°44′	1 33	1°40′	1°45′	1 36	1 35	1 38	1°45′	1 39
1 27	1°30′	1 22	1 22	1 24	1 22	1 24	1 21	1 28	1 31	1 21	1 27	1 30	1 23	1 24	1 26	1 31	1 27
1 15	1 17	1 12	1 12	1 15	1 12	1 13	1 10	1 17	1 18	1 11	1 16	1 18	1 11	1 15	1 15	1 20	1 16
1 5	1 7	1 4	1 3	1 6	1 5	1 5	1 2	1 7	1 8	1 2	1 6	1 7	1 2	1 5	1 6	1 10	1 6
1 0	1 0	0 55	0 58	0 57	0 58	0 55	0 55	0 59	1 1	0 54	0 58	0 58	0 54	0 57	0 59	1 2	0 59
0 52	0 53	0 50	0 52	0 50	0 51	0 50	0 48	0 52	0 54	0 48	0 52	0 51	0 48	0 51	0 53	0 55	0 53
0 47	0 46	0 45	0 45	0 45	0 45	0 45	0 41	0 46	0 48	0 42	0 46	0 45	0 43	0 45	0 47	0 50	0 47
0 40	0 40	0 40						0 40	0 43		0 40	0 39				0 45	
	0 35																
2° Disque plein en bas.																	
									1°55′	2° 2′			2° 0′	2° 4′			
				1°45′		1°49′			1 48	1 53			1 50	1 55			1°50′
1°35′	1°40′	1°40′	1°40′	1 37	1°40′	1 42	1°38′		1 40	1 45			1 41	1 47			1 41
1 30	1 32	1 33	1 32	1 31	1 34	1 35	1 32		1 33	1 37			1 33	1 39			1 33
1 25	1 25	1 27	1 25	1 25	1 28	1 29	1 25		1 26	1 31			1 26	1 31			1 26
1 20	1 20	1 21	1 20	1 19	1 21	1 22	1 19		1 20	1 25	1°19′		1 20	1 25			1 20
1 13	1 15	1 16	1 13	1 13	1 15	1 15	1 13	1°15′	1 15	1 19	1 14	1°16′	1 15	1 19	1°15′		1 15
1 10	1 8	1 11	1 8	1 10	1 11	1 9	1 8	1 10	1 9	1 14	1 9	1 11	1 9	1 14	1 10	1°10′	1 10
1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 4	1 3	1 5			1 5	1 6	1 4		1 6	1 5	1 5
1 0	1 0	1 0	1 0		1 0		0 58	1 1			1 1	1 2			1 1	1 1	
								0 57			0 58	0 58			0 57	0 57	
								0 53			0 54	0 54			0 53	0 53	
								0 49			0 50	0 50			0 50	0 50	
								0 46				0 46			0 47	0 47	
																0 44	

Pour déduire de ces observations la loi du décroissement de l'amplitude dans les deux modes de suspension du pendule, il est plus commode de les mettre sous une autre forme, parce que l'amplitude initiale n'est pas la même dans les différents cas, tandis que l'intervalle de temps qui sépare deux observations consécutives est toujours le même, savoir de six minutes.

La relation qui existe entre l'amplitude α, observée à un certain instant, et l'intervalle t qui sépare cet instant de l'instant moyen de la série, l'unité de t étant de six minutes, peut être mise sous la forme

$$\alpha = A + B \,.\, t + C \,.\, t^2 + \text{etc.}$$

A, B, C étant des constantes que l'on calculera, pour chacune des séries d'observations, par la méthode des moindres carrés, d'après les huit valeurs de l'amplitude observées de six minutes en six minutes. Réciproquement, A, B, C ayant été déterminées, cette équation servira à trouver la valeur de t correspondant à une valeur donnée de α, $1°50'$, par exemple, puis à une seconde valeur de α, $1°45'$, dont la différence fera connaître l'intervalle de temps qui a été employé, pour que l'amplitude décroisse de $1°50'$ à $1°45'$, et ainsi de suite. J'ai calculé de cette façon, pour chacune des dix-huit séries d'observations, le disque plein étant en haut, et le disque plein étant en bas, l'intervalle de temps qui était employé pour un décroissement de cinq minutes dans l'amplitude, entre les limites dans lesquelles l'amplitude avait été observée dans chaque série. Ces dix-huit séries donnent des résultats très-concordants pour l'intervalle de temps exigé pour un décroissement de $5'$ entre les mêmes limites; les très-faibles écarts d'une série à l'autre peuvent être facilement expliqués par les erreurs d'observation et par les circonstances différentes, comme densité de l'air, etc. En prenant ensuite la moyenne des résultats fournis par les dix-huit séries, dans les deux modes de suspension du pendule, j'ai obtenu les chiffres du tableau suivant; une seconde colonne donne le décroissement pour chaque oscillation du pendule dans les limites correspondantes d'amplitude. J'indique enfin dans

une dernière colonne le rapport du décroissement de l'amplitude, suivant que le disque plein est en haut, ou en bas.

Décroissement de l'amplitude.	1° Disque plein en haut — temps employé.	1° Disque plein en haut — décroissement pour une oscillation.	2° Disque plein en bas — temps employé.	2° Disque plein en bas — décroissement pour une oscillation.	Rapport du décroissement.
de 2° 0′ à 1°55′			3m,343	1″,127	
de 1 55 à 1 50			3 ,484	1 ,081	
de 1 50 à 1 45	2m,118	1″,779	3 ,708	1 ,016	1,75
de 1 45 à 1 40	2 ,205	1 ,709	3 ,883	0 ,970	1,76
de 1 40 à 1 35	2 ,298	1 ,640	4 ,214	0 ,894	1,83
de 1 35 à 1 30	2 ,400	1 ,570	4 ,435	0 ,849	1,85
de 1 30 à 1 25	2 ,523	1 ,493	4 ,691	0 ,803	1,86
de 1 25 à 1 20	2 ,655	1 ,419	5 ,014	0 ,751	1,89
de 1 20 à 1 15	2 ,826	1 ,333	5 ,404	0 ,697	1,91
de 1 15 à 1 10	3 ,021	1 ,247	5 ,989	0 ,629	1,98
de 1 10 à 1 5	3 ,276	1 ,150	6 ,392	0 ,589	1,95
de 1 5 à 1 0	3 ,600	1 ,046	6 ,835	0 ,551	1,90
de 1 0 à 0 55	4 ,047	0 ,931	7 ,676	0 ,491	1,90
de 0 55 à 0 50	4 ,719	0 ,798	8 ,462	0 ,445	1,79
de 0 50 à 0 45	5 ,928	0 ,636	9 ,556	0 ,394	1,61
de 0 45 à 0 40	7 ,926	0 ,475			

Il paraîtrait, d'après ces chiffres, que le rapport du décroissement de l'amplitude pour une oscillation, suivant que le disque plein est en haut, ou en bas, n'est pas constant; ce rapport va en croissant lentement jusqu'à l'amplitude de 1°10′ environ, où il est près de 2, puis il diminue rapidement. Ces différences tiennent, comme il est facile de le montrer, à une petite irrégularité dans le décroissement de l'amplitude, lorsque le disque plein est en haut, en sorte que le décroissement ne suit pas une loi régulière en fonction de l'amplitude, ou de la vitesse du mouvement. L'on peut effectivement représenter la relation qui existe entre le décroissement D de l'amplitude pour une oscillation, et la vitesse v du mouvement, par une équation de la forme :

$$D = P + Qv + Rv^2 + Sv^3 + \text{etc.}$$

En prenant pour l'unité de vitesse celle qui correspond à une certaine amplitude, on peut, en mettant pour v la vitesse qui correspond à chaque valeur observée du décroissement, déduire par la méthode des moindres carrés les constantes P, Q, R, S, etc. J'ai fait le calcul en prenant pour unité de vitesse celle qui correspond à une amplitude de

1°15′, et j'ai trouvé pour la formule qui représentait le mieux les décroissements observés :

$$D = v.1'',0599 + v^2.0'',1632$$

lorsque le disque plein était en haut; et

$$D' = v.0'',5651 + v^2.0'',1012$$

lorsque le disque plein était en bas.

Si l'on calcule avec ces formules le décroissement de l'amplitude, de 5′ en 5′, on trouve le résultat suivant dans les deux modes de suspension, à côté duquel j'ai inséré la différence entre le décroissement calculé et le décroissement observé.

	1° Disque plein en haut		2° Disque plein en bas	
Décroissement de l'amplitude.	Décroissement calculé pour une oscillation.	Calcul moins Observation.	Décroissement calculé pour une oscillation.	Calcul moins Observation.
de 2° 0′ à 1°55′			1″,134	+0″,007
de 1 55 à 1 50			1 ,075	—0 ,006
de 1 50 à 1 45	1″,854	+0″,075	1 ,018	+0 ,002
de 1 45 à 1 40	1 ,754	+0 ,045	0 ,962	—0 ,008
de 1 40 à 1 35	1 ,654	+0 ,014	0 ,906	+0 ,012
de 1 35 à 1 30	1 ,555	—0 ,015	0 ,851	+0 ,002
de 1 30 à 1 25	1 ,459	—0 ,034	0 ,797	—0 ,006
de 1 25 à 1 20	1 ,363	—0 ,056	0 ,744	—0 ,007
de 1 20 à 1 15	1 ,269	—0 ,064	0 ,692	—0 ,005
de 1 15 à 1 10	1 ,178	—0 ,069	0 ,641	+0 ,012
de 1 10 à 1 5	1 ,086	—0 ,064	0 ,590	+0 ,001
de 1 5 à 1 0	0 ,996	—0 ,050	0 ,541	—0 ,010
de 1 0 à 0 55	0 ,909	—0 ,022	0 ,493	+0 ,002
de 0 55 à 0 50	0 ,822	+0 ,024	0 ,445	0
de 0 50 à 0 45	0 ,736	+0 ,100	0 ,398	+0 ,004
de 0 45 à 0 40	0 ,653	+0 ,178		

Ainsi le décroissement de l'amplitude, lorsque le disque plein est en bas, peut être représenté entre les limites de 2° 0′ et de 0° 45′, avec une très-grande exactitude, par un terme proportionnel à la vitesse, et par un terme proportionnel au carré de la vitesse; les écarts entre le calcul par la formule et l'observation sont très-petits, la valeur moyenne étant ± 0″,007, et ils ne suivent aucune loi, en sorte qu'ils peuvent être attribués aux erreurs accidentelles dans l'observation de l'amplitude. Ces valeurs du décroissement de l'amplitude entre les limites indiquées se rapportent naturellement à la densité moyenne de l'air pendant la

série des observations; celle-ci est déterminée par la pression de 732^{mm}, et la température $+11^{\circ},1$.

Il n'en est pas de même pour les observations faites lorsque le disque plein est en haut; la valeur de l'écart moyen entre le calcul et l'observation est de $\pm 0'',074$, c'est-à-dire plus de dix fois plus grand que pour l'autre mode de suspension, et fort au delà des limites de l'erreur dans l'observation de l'amplitude. De plus, la marche régulière dans les écarts indique qu'ils doivent être attribués à la formule, qui ne représente pas exactement la loi du décroissement. Ainsi le décroissement de l'amplitude, dans ce mode de suspension du pendule, ne peut pas être complétement représenté par deux termes, l'un proportionnel à la vitesse, l'autre proportionnel au carré de la vitesse. J'ai essayé en vain de modifier la formule en introduisant de nouveaux termes renfermant la vitesse avec l'exposant 0, 1/2, 3/2, 3, etc.; les écarts entre le décroissement calculé et le décroissement observé étaient, dans tous ces cas, beaucoup plus considérables qu'en ne prenant que les deux termes, dont la valeur a été donnée.

Les tableaux suivants renferment la réduction des observations des oscillations, faite suivant le mode qui vient d'être expliqué : la première colonne donne le nombre d'oscillations du pendule dans l'intervalle de temps sidéral marqué dans la seconde colonne; la troisième colonne donne l'incertitude probable de cet intervalle causée par les erreurs fortuites dans l'observation des passages, et par les erreurs d'enregistrement et de transformation du temps chronographique en temps de la pendule normale; la quatrième colonne donne la durée observée d'une oscillation en temps sidéral, obtenue en divisant l'intervalle par le nombre d'oscillations; dans les colonnes cinq et six se trouvent la température moyenne et l'amplitude moyenne pendant la durée des oscillations; les colonnes sept et huit renferment les corrections nécessaires pour réduire la durée observée à une température de $16^{\circ}\,{}^{1}/_{4}$, et à l'arc infiniment petit, ces corrections sont données, pour abréger, en unités de la septième décimale, soit en dix millionnièmes de seconde; enfin la neuvième colonne renferme la durée réduite d'une oscillation en temps sidéral.

Première série : courts intervalles.

Mode de suspension.	Nombre d'oscillations.	Intervalle en temps sidéral.	Erreur probable de cet intervalle.	Durée observée d'une oscillation, temps sidéral.	Température moyenne.	Amplitude moyenne	Réduction de la durée à + 16° 1/4	Réduction de la durée à l'arc infiniment petit.	Durée réduite d'une oscillation en temps sidéral.
20 Novembre 1864. Ajustement A des couteaux.									
		s	s	s	°	° ′			s
R.O. haut	508	382,7004	±0,0156	0,7533476	+ 7,4	1 15	+ 626	— 112	0,7533990
R.E. haut	428	322,4653	0,0158	0,7534236	+ 7,4	1 15	+ 626	— 112	0,7534750
R.E. bas	512	385,8225	0,0156	0,7535595	+ 7,4	1 15	+ 626	— 112	0,7536109
R.O. bas	502	378,2622	0,0156	0,7535103	+ 7,4	1 15	+ 626	— 112	0,7535617
23 Décembre 1864. Ajustement A des couteaux.									
R.O. haut	474	357,1003	0,0120	0,7533764	+ 1,9	1 42,5	+1015	— 210	0,7534569
R.E. haut	478	360,1115	0,0120	0,7533714	+ 1,75	1 17,5	+1026	— 120	0,7534620
R.E. bas	466	351,1424	0,0119	0,7535246	+ 1,75	1 0	+1026	— 072	0,7536200
R O. bas	478	360,1295	0,0120	0,7534090	+ 1,8	1 10	+1022	— 097	0,7535015
8 Janvier 1865. Ajustement B des couteaux.									
R.O. haut	496	373,6182	0,0082	0,7532624	+ 3,7	1 15	+ 888	— 112	0,7533400
R.E. haut	488	367,6563	0,0077	0,7533946	+ 3,75	1 17,5	+ 884	— 119	0,7534711
R.E. bas	486	366,2174	0,0079	0,7535338	+ 3,85	1 5	+ 877	— 085	0,7536130
R.O. bas	490	369,2058	0,0077	0,7534812	+ 4,0	1 10	+ 867	— 097	0,7535582
9 Janvier 1865. Ajustement B des couteaux.									
R.E. bas	500	376,7635	0,0089	0,7535270	+ 4,45	1 5	+ 835	— 085	0,7536020
R.O. bas	494	372,2055	0,0089	0,7534526	+ 4,6	1 5	+ 824	— 085	0,7535265
R.O. haut	500	376,6892	0,0093	0,7533784	+ 4,9	1 25	+ 803	— 143	0,7534444
R.E. haut	500	376,6991	0,0090	0,7533982	+ 5,15	1 25	+ 786	— 143	0,7534625
28 Janvier 1865. Ajustement B des couteaux.									
R.O. haut	500	376,6876	0,0068	0,7533752	+ 7.4	1 22,5	+ 626	— 136	0,7534242
R.O. bas	500	376,7778	0,0064	0,7535556	+ 7,3	1 37,5	+ 633	— 191	0,7535998
R.E. bas	500	376,7761	0,0063	0,7535522	+ 7,35	1 37,5	+ 630	— 191	0,7535961
29 Janvier 1865. Ajustement C des couteaux.									
R.E. bas	500	376,7531	0,0073	0,7535062	+ 5,3	1 22,5	+ 775	— 136	0,7535701
R.O. bas	500	376,7511	0,0074	0,7535022	+ 5,3	1 17,5	+ 775	— 119	0,7535678
R.O. haut	586	441,4695	0,0071	0,7533609	+ 5,35	1 25	+ 771	— 143	0,7534237
R.O. haut	500	376,6983	0,0070	0,7533976	+ 5,45	1 32,5	+ 764	— 170	0,7534570
R.E. haut	500	376,6841	0,0071	0,7533682	+ 5,5	1 32,5	+ 761	— 170	0,7534273
8 Février 1865 Ajustement C des couteaux.									
R.O. haut	464	349,5557	0,0099	0,7533528	+ 5,55	1 15	+ 757	— 112	0,7534173
R.E. haut	460	346,5823	0,0102	0,7534398	+ 5,55	1 32,5	+ 757	— 170	0,7534985
R.E. bas	500	376,7892	0,0095	0,7535784	+ 5,25	1 22,5	+ 778	— 137	0,7536425
R.O. bas	500	376,7549	0,0094	0,7535098	+ 5,2	1 22,5	+ 782	— 137	0,7535743

Première série : courts intervalles.

Mode de suspension.	Nombre d'oscillations.	Intervalle en temps sidéral.	Erreur probable de cet intervalle.	Durée observée d'une oscillation, temps sidéral.	Température moyenne.	Amplitude moyenne	Réduction de la durée à + 16° 1/4	Réduction de la durée à l'arc infiniment petit.	Durée réduite d'une oscillation en temps sidéral.
18 Mars 1865. Ajustement C des couteaux.									
		s	s	s	°	° ′			s
R.E. haut	500	376,6716	±0,0049	0,7533432	+ 6,75	1 37,5	+ 672	— 191	0,7533913
R.O. haut	500	376,7029	0,0047	0,7534058	+ 6,75	1 35	+ 672	— 180	0,7534550
R.O. bas	500	376,7431	0,0047	0,7534862	+ 6,75	1 22,5	+ 672	— 137	0,7535397
R.E. bas	500	376,7568	0,0045	0,7535136	+ 6,75	1 27,5	+ 672	— 153	0,7535655
29 Mars 1865. Ajustement D des couteaux.									
R.E. haut	500	376,6599	0,0034	0,7533198	+ 1,7	1 40	+1029	— 200	0,7534027
R.O. haut	500	376,6552	0,0023	0,7533104	+ 1,7	1 40	+1029	— 200	0,7533933
R.O. bas	500	376,7561	0,0028	0,7535122	+ 1,85	1 30	+1019	— 162	0,7535979
R.E. bas	500	376,7487	0,0028	0,7534974	+ 1,95	1 45	+1011	— 220	0,7535765
30 Mars 1865. Ajustement D des couteaux.									
R.E. bas	500	376,7518	0,0109	0,7535036	+ 2,85	1 22,5	+ 948	— 137	0,7535847
R.O. bas	500	376,7652	0,0109	0,7535304	+ 2,8	1 22,5	+ 952	— 137	0,7536119
R.O. haut	500	376 6889	0,0110	0,7533778	+ 2,75	1 30	+ 955	— 162	0,7534571
R.E. haut	500	376,6571	0,0109	0,7533142	+ 2,65	1 22,5	+ 962	— 137	0,7533967
17 Avril 1865. Ajustement D des couteaux.									
R.E. haut	500	376,7201	0,0058	0,7534402	+16,35	1 25	— 007	— 143	0,7534252
R.O. haut	500	376,7494	0,0058	0,7534988	+16,4	1 25	— 011	— 143	0,7534834
R.O. bas	500	376,7980	0,0058	0,7535960	+16,4	1 35	— 011	— 180	0,7535769
R.E. bas	500	376,7673	0,0057	0,7535346	+16,4	1 37,5	— 011	— 191	0,7535144
10 Mai 1865. Ajustement D des couteaux.									
R.E. bas	500	376,7988	0,0090	0,7535976	+18,9	1 12,5	— 187	— 105	0,7535684
R.E. haut	500	376,7149	0,0092	0,7534298	+19,05	1 15	— 198	— 112	0,7533988
Deuxième série : longs intervalles.									
11 Juin 1865. Ajustement D des couteaux.									
R.O. haut	2828	2130,8288	±0,0107	0,7534756	+22,0	1 18,0	— 407	— 123	0,7534226
R.E. haut	2828	2130,8140	0,0106	0,7534704	+22,35	1 18,5	— 432	— 125	0,7534147
R.E. bas	2828	2131,2384	0,0107	0,7536203	+22,55	0 58.0	— 446	— 071	0,7535686
R.O. bas	2828	2131,2263	0,0106	0,7536161	+22,6	1 5,3	— 449	— 090	0,7535622
12 Juin 1865. Ajustement D des couteaux.									
R.O. haut	2828	2130,7815	0,0046	0,7534588	+19,7	1 19,2	— 244	— 127	0,7534217
R.E. haut	2828	2130,7707	0,0045	0,7534550	+19,9	1 17,5	— 258	— 122	0,7534170
R.E. bas	2828	2131,1824	0,0052	0,7536005	+19,85	1 11,1	— 255	— 106	0,7535644
R.O. bas	2828	2131,2030	0,0048	0,7536078	+19,8	1 2,1	— 251	— 081	0,7535746

Deuxième série : longs intervalles.

Mode de suspension.	Nombre d'oscillations.	Intervalle en temps sidéral.	Erreur probable de cet intervalle.	Durée observée d'une oscillation, temps sidéral.	Température moyenne.	Amplitude moyenne	Réduction de la durée à + 16° 1/4	Réduction de la durée à l'arc infiniment petit.	Durée réduite d'une oscillation en temps sidéral.
26 Octobre 1865. Ajustement C des couteaux.									
		s	s	s	o	o ′			s
R.O. haut	2828	2130,6773	±0,0125	0,7534221	+14,05	1 23,5	+ 156	— 141	0,7534236
R.E. haut	2828	2130,6481	0,0124	0,7534116	+14,45	1 19,6	+ 127	— 128	0,7534115
R.E. bas	2828	2131,1197	0,0124	0,7535783	+14,45	1 10,7	+ 127	— 104	0,7535806
R.O. bas	2828	2131,0753	0,0125	0,7535628	+14,3	1 12,2	+ 138	— 110	0,7535656
30 Octobre 1865. Ajustement C des couteaux.									
R.O. haut	2828	2130,6535	0,0082	0,7534135	+12,9	1 25,8	+ 237	— 149	0,7534223
R.E. haut	2828	2130,6465	0,0082	0,7534111	+13,55	1 17,2	+ 191	— 121	0,7534181
R.E. bas	2828	2131,0542	0,0082	0,7535553	+13,65	1 9,2	+ 184	— 101	0,7535636
R.O. bas	2828	2131,0314	0,0083	0,7535471	+13,15	1 11,4	+ 219	— 107	0,7535583
13 Novembre 1865. Ajustement B des couteaux.									
R.E. haut	2828	2130,5250	0,0105	0,7533681	+ 6,95	1 30,8	+ 658	— 167	0,7534172
R.O. haut	2828	2130,5266	0,0104	0,7533686	+ 7,25	0 59,5	+ 636	— 072	0,7534250
R.O. bas	2828	2130,9076	0,0105	0,7535035	+ 7,6	1 5,7	+ 612	— 091	0,7535556
R.E. bas	2828	2130,9041	0,0106	0,7535021	+ 7,6	1 7,5	+ 612	— 096	0,7535537
17 Novembre 1865. Ajustement B des couteaux.									
R.E. haut	2828	2130,4918	0,0086	0,7533562	+ 5,95	1 3,7	+ 729	— 082	0,7534209
R.O. haut	2828	2130,5390	0,0086	0,7533731	+ 6,0	1 35,7	+ 724	— 186	0,7534269
R.O. bas	2828	2130,8679	0,0085	0,7534895	+ 6,0	1 9,2	+ 724	— 101	0,7535518
R.E. bas	2828	2130,8691	0,0085	0,7534898	+ 6,0	1 5,0	+ 724	— 089	0,7535533
20 Décembre 1865. Ajustement A des couteaux.									
R.E. haut	2828	2130,4289	0,0097	0,7533340	+ 2,3	1 25,2	+ 987	— 147	0,7534180
R.O. haut	2828	2130,3740	0,0096	0,7533148	+ 2,6	1 0,8	+ 966	— 075	0,7534039
R.O. bas	2828	2130,8092	0,0097	0,7534686	+ 2,55	1 6,5	+ 969	— 094	0,7535561
R.E. bas	2828	2130,7849	0,0096	0,7534600	+ 2,5	1 10,0	+ 973	— 104	0,7535469
25 Janvier 1866. Ajustement A des couteaux.									
R.O. haut	2828	2130,5676	0,0090	0,7533831	+ 7,25	1 37,2	+ 636	— 192	0,7534275
R.E. haut	2828	2130,4884	0,0090	0,7533552	+ 7,2	0 59,8	+ 640	— 072	0,7534120
R.E. bas	2828	2130,8917	0,0090	0,7534978	+ 6,95	1 13,7	+ 658	— 114	0,7535522
R.O. bas	2828	2130,9145	0,0090	0,7535058	+ 6,7	1 12,0	+ 676	— 109	0,7535625
26 Janvier 1866. Ajustement A des couteaux.									
R.E. haut	2828	2130,5004	0,0137	0,7533593	+ 6,7	1 24,8	+ 676	— 146	0,7534123
R.O. haut	2828	2130,5030	0,0137	0,7533602	+ 7,1	0 55,4	+ 647	— 063	0,7534186
R.O. bas	2828	2130,9480	0,0137	0,7535176	+ 7,45	1 8,5	+ 623	— 098	0,7535701
R.E. bas	2828	2130,9496	0,0137	0,7535183	+ 7,55	1 14,0	+ 615	— 115	0,7535683

Il ne reste plus maintenant qu'à réduire en temps moyen la durée d'une oscillation, donnée en temps sidéral, et à comparer les résultats obtenus d'un jour à l'autre pour la durée d'une oscillation dans les deux modes de suspension du pendule, suivant que le disque plein est en haut, ou en bas. Dans cette comparaison, il faut examiner séparément les observations de la première série d'expériences, faites avec de courts intervalles de temps, et celles de la seconde; c'est par la première que je commencerai en plaçant toujours dans le même ordre l'observation faite, le pendule étant suspendu sur le même couteau, mais la même extrémité étant alternativement tournée vers l'observateur, ou diamétralement opposée. A côté du chiffre obtenu pour la durée de l'oscillation, j'indique son erreur probable en unités de la septième décimale; cette erreur probable est obtenue en divisant l'incertitude sur l'intervalle de temps par le nombre des oscillations, c'est celle qui résulte des erreurs accidentelles dans l'observation des passages, et de celles provenant de l'enregistrement chronographique.

(*Voir le tableau ci-contre.*)

Si l'on prend la moyenne des 23 observations de la durée T d'une oscillation, lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité et en négligeant, par conséquent, les petites variations qui pourraient être produites par une petite différence dans la longueur du pendule suivant l'ajustement des couteaux, de même que celles qui seraient dues au mode de suspension, suivant que la même extrémité est tournée vers l'observateur, ou diamétralement opposée, enfin celles que les différences dans la densité de l'air, ou dans l'amplitude, pourraient introduire dans la quantité γ (voyez page 81), on a $T = 0^s,7515198$. On trouve par la somme des carrés des écarts entre chaque valeur de T et la moyenne, $\pm 0^s,0000345$ pour écart moyen, et, par suite, $\pm 0^s,0000233$ pour erreur probable, tandis que l'erreur probable résultant des imperfections de l'enregistrement chro-

Ajustement des couteaux.	Date.	Mode de suspension.	Disque plein en haut.		Disque plein en bas.	
			Durée T en temps moyen.	Erreur probable.	Durée T′ en temps moyen.	Erreur probable.
			s		s	
A	20 novembre 1864	R E	0,7515532	±304	0,7514177	±307
»	» » »	R O	0,7515042	310	0,7513419	369
»	23 décembre »	R E	0,7515623	255	0,7514047	251
»	» » »	R O	0,7514441	251	0,7513996	253
B	8 janvier 1865	R E	0,7515553	162	0,7514138	158
»	» » »	R O	0,7515007	157	0,7512831	165
»	9 » »	R E	0,7515443	178	0,7514052	180
»	» » »	R O	0,7514691	180	0,7513872	186
»	28 » »	R E	0,7515385	126		
»	» » »	R O	0,7515422	128	0,7513670	136
C	29 » »	R E	0,7515125	146	0,7513701	142
»	» » »	R O	0,7515103	148	0,7513665	121
»	» » »	R O			0,7513997	140
»	8 février »	R E	0,7515847	190	0,7514411	222
»	» » »	R O	0,7515167	188	0,7513602	213
»	18 mars »	R E	0,7515080	90	0,7513342	98
»	» » »	R O	0,7514822	94	0,7513977	94
D	29 » »	R E	0,7515189	56	0,7513456	68
»	» » »	R O	0,7515403	56	0,7513362	46
»	30 » »	R E	0,7515271	218	0,7513396	218
»	» » »	R O	0,7515542	218	0,7513998	220
»	17 avril »	R E	0,7514570	114	0,7513681	116
»	» » »	R O	0,7515193	116	0,7514261	116
»	10 mai »	R E	0,7515108	180	0,7513417	184
	Moyenne 23 observations		0,7515198	±168	0,7513759	±174

nographique et des erreurs fortuites dans l'observation des passages est ± 0^s,0000168. On trouverait de même par la moyenne des 23 observations faites, lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, la durée moyenne T′ d'une oscillation = 0^s,7513759 ; l'écart moyen d'une de ces observations est de ± 0^s,0000375, et, par suite, l'erreur probable ± 0^s,0000253, tandis que l'erreur probable calculée d'après l'incertitude sur l'intervalle de temps est ± 0^s,0000174.

Comme, dans la seconde série d'expériences, les écarts entre les différentes valeurs de T ou de T′ sont environ cinq fois plus petits que

dans la première, on est amené à attribuer les écarts de celle-ci à des erreurs accidentelles, et non à l'influence des forces troublantes, qui auraient pu exercer une action différente d'un jour à l'autre. L'erreur probable sur la durée d'une oscillation est de $\pm$ 0^s,0000243 d'après la valeur de l'écart moyen sur une valeur de T ou de T', ce qui donne $\pm$ 0^s,01215 pour l'erreur probable de l'intervalle de temps employé pour 500 oscillations. Or, nous avons vu d'un autre côté que l'on peut évaluer en moyenne à $\pm$ 0^s,00855, l'erreur probable sur cet intervalle, en tant qu'elle est due aux erreurs accidentelles dans l'observation des passages du pendule par la verticale, et aux imperfections de l'enregistrement chronographique. Il suffit, par conséquent, pour expliquer l'erreur probable dans la durée d'une oscillation, d'admettre l'existence d'une autre cause pouvant donner lieu, sur un intervalle de 6 à 7 minutes, à des erreurs accidentelles entre les limites probables de $\pm$ 0^s,00865. Cette cause est facile à indiquer, c'est une variation physiologique dans la manière de donner les signaux sur le levier-clef, à l'instant où l'observateur voit passer le point de repère derrière le fil de la lunette ; on ne peut pas admettre que la corrélation de la perception d'un phénomène par la vue, et du mouvement correspondant du doigt, soit absolument constante, et qu'elle ne soit pas variable dans des limites de quelques millièmes de seconde, entre deux observations faites à 6 ou 7 minutes d'intervalle, pendant lesquelles l'attention de l'observateur a été occupée d'une autre manière. Il suffit d'admettre une variabilité de $\pm$ 0^s,0061 pour produire une erreur de $\pm$ 0^s,00865 dans l'intervalle de temps, c'est-à-dire une erreur égale à celle dont il s'agissait de trouver l'origine.

Examinons maintenant les résultats obtenus dans la seconde série d'expériences, en les groupant de la même manière que celles de la première série, page 91 :

Ajustement des couteaux.	Date.	Mode de suspension.	Disque plein en haut.		Disque plein en bas.	
			Durée T en temps moyen.	Erreur probable.	Durée T′ en temps moyen.	Erreur probable.
			s		s	
D	11 juin 1865	R E	0,7515110	±38	0,7513576	±38
»	» » »	R O	0,7515047	38	0,7513654	38
»	12 » »	R E	0,7515069	18	0,7513599	16
»	» » »	R O	0,7515170	17	0,7513645	16
C	26 octobre »	R E	0,7515230	44	0,7513544	44
»	» » »	R O	0,7515081	44	0,7513664	44
»	30 » »	R E	0,7515061	30	0,7513610	30
»	» » »	R O	0,7515008	30	0,7513651	30
B	13 novembre »	R E	0,7514962	37	0,7513601	37
»	» » »	R O	0,7514981	37	0,7513678	37
»	17 » »	R E	0,7514958	30	0,7513637	30
»	» » »	R O	0,7514943	30	0,7513697	30
A	20 décembre »	R E	0,7514894	34	0,7513609	34
»	» » »	R O	0,7514986	34	0,7513468	34
»	25 janvier 1866	R E	0,7514947	32	0,7513549	32
»	» » »	R O	0,7515050	32	0,7513703	32
»	26 » »	R E	0,7515108	48	0,7513552	48
»	» » »	R O	0,7515125	48	0,7513615	48
	Moyenne 18 observations.		0,7515040.5	±35	0,7513614	±34

Nous avons déjà vu que les erreurs provenant de l'enregistrement et de la transformation d'un intervalle chronographique en temps de la pendule normale étaient à peu près les mêmes, que cet intervalle fût de 6 à 7 minutes seulement, ou cinq à six fois plus long. Aussi l'erreur probable sur la durée d'une oscillation, provenant des erreurs fortuites dans l'observation des passages et de l'enregistrement chronographique, est-elle seulement de $\pm$ 0s,0000034, en moyenne, dans cette seconde série, c'est-à-dire cinq fois plus petite que dans la première série, où l'intervalle de temps était 5,6 fois plus court.

Comparons d'abord entre elles toutes les valeurs de T, et toutes celles de T′, en faisant par conséquent abstraction des causes qui pourraient produire une différence de l'une à l'autre, telles que : les variations dans l'ajustement des couteaux et les différences qui résultent de ces changements dans la longueur du pendule ; les variations dans la valeur

de γ qui pourraient résulter de différences dans la densité de l'air, ou de différences dans l'amplitude; les erreurs qui pourraient résulter sur la réduction à la température de 16° ¹/₄ d'une erreur dans le coefficient de dilatation de la tige du pendule, etc. De la somme des carrés des écarts entre chaque valeur de T et la moyenne, on déduit $\pm$ 0ˢ,0000088 pour écart moyen, et, par suite, $\pm$ 0ˢ,0000059 pour erreur probable d'une valeur de T. On trouve de même, par la somme des carrés des écarts entre chaque valeur de T′ et la moyenne, $\pm$ 0ˢ,0000060 pour écart moyen, et $\pm$ 0ˢ,0000040 pour erreur probable d'une valeur de T′. Ces erreurs sont à peu près cinq fois plus faibles que celles de la première série d'expériences, et la moyenne des 23 déterminations de T, ou de T′, de cette première série est affectée de la même incertitude qu'une seule détermination de T, ou de T′, dans la seconde série.

Examinons maintenant les différentes causes énumérées plus haut, qui peuvent produire une différence dans la durée de l'oscillation, en commençant par celle qui est due au changement d'ajustement des couteaux. Les observations des oscillations faites le 11 et le 12 juin 1865, dans l'ajustement D, correspondent aux mesures de la longueur du pendule de la quatrième série, page 46; celles du 26 et du 30 octobre, ajustement C, correspondent à celles de la cinquième série; celles du 13 et du 17 novembre, ajustement B, à celles de la sixième série; enfin celles du 20 décembre 1865, du 25 et du 26 janvier 1866, ajustement A, à celles de la septième série. D'après les chiffres donnés à la page 46, pour ces différentes séries, la longueur moyenne de la distance entre les couteaux, pour les observations du 11 juin 1865 au 26 janvier 1866, est de 248ˡ,48243, et on peut réduire à cette longueur moyenne les observations de chaque jour, d'après la longueur pour la série correspondante; on élimine de cette façon les différences que le changement d'ajustement des couteaux introduit dans la longueur du pendule. Pour effectuer cette réduction à la longueur moyenne, il faut appliquer les

corrections suivantes à la distance entre les couteaux, et à la durée d'une oscillation :

	l	s
11 et 12 juin 1865	+0,00217	+0,0000033
26 et 30 octobre 1865	−0,00231	−0,0000035
13 et 17 novembre 1865	+0,00051	+0,0000008
20 décembre 1865, 25 et 26 janvier 1866.	−0,00026	−0,0000004

En appliquant ces corrections aux durées observées d'une oscillation, pour les différents jours, on pourra supposer que la distance entre les couteaux ait été la même pour toutes, savoir λ égal à **248l,48243**, à la température de 16° $^1/_4$. Si l'on peut éliminer de cette façon les petites différences que le changement d'ajustement des couteaux introduit dans la distance qui les sépare, et dans la durée de l'oscillation, il n'en est pas de même de celles qui pourraient provenir d'une très-légère inégalité dans la forme des couteaux, ou dans leur direction. Celles-ci sont bien éliminées dans la moyenne d'observations, dans lesquelles on a fait varier l'ajustement de toutes les manières possibles, mais il est impossible de déterminer *à priori* l'effet que produiront ces changements d'ajustement; cet effet se trouvera, par conséquent, compris dans les différences dues aux erreurs accidentelles.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, j'avais fait varier l'amplitude initiale, dans des limites assez étendues, dans les deux déterminations de la durée T′ d'une oscillation faites le même jour, lorsque le pendule était suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, et cela dans le but de chercher l'influence que l'amplitude pouvait avoir sur la valeur de γ. C'est à partir du 30 octobre que j'ai fait varier l'amplitude initiale d'une manière notable dans les deux déterminations de T′ ; pour les trois premiers jours, ainsi que dans la détermination de T pendant toute la série, l'amplitude était trop peu différente d'une observation à l'autre pour qu'il fût possible de tenter une pareille comparaison.

Si l'on désigne par x l'allongement dans la durée d'une oscillation T′, exprimé en unités de la septième décimale, et correspondant à une

augmentation de 5′ dans l'amplitude moyenne, on aura, d'après la valeur de l'amplitude moyenne dans chaque expérience, page 89, et d'après les valeurs de T′, page 93, les relations suivantes :

30 octobre	1865	$+1,71\,x =$	$+\ 41$
13 novembre	»	$+6,26\,x =$	$-\ 77$
17 novembre	»	$+6,40\,x =$	$+\ 60$
20 décembre	»	$+4,88\,x =$	$+141$
25 janvier	1866	$+7,48\,x =$	$+154$
26 janvier	»	$+5,88\,x =$	$-\ 63$

Ainsi, dans quatre cas, la durée de l'oscillation était plus longue lorsque l'amplitude était plus considérable, et dans deux cas l'inverse s'est présenté. Si des équations précédentes on déduit la valeur la plus probable de x, on trouve $x = +\ 7,3 \pm 4,6$, c'est-à-dire qu'un changement de $\pm\ 5'$ dans l'amplitude produit une différence dans la valeur de γ, qui correspond à un changement de $\pm\ 7,3$ unités de la septième décimale dans la durée de l'oscillation. L'incertitude sur cette valeur de x s'élève à une fraction très-notable, les cinq huitièmes environ du chiffre obtenu, ce qui n'a pas lieu de surprendre, attendu que les différences observées dans la durée de l'oscillation ne dépassent guère celles qui peuvent être attribuées aux erreurs accidentelles, lors même que l'amplitude a varié de 30 à 40 minutes. Malgré l'incertitude qui subsiste sur la valeur de x ainsi obtenue, j'en ai tenu compte dans la détermination de la durée probable d'une oscillation, résultant des observations de chaque jour, pour ce mode de suspension ; comme la valeur moyenne de l'amplitude pour les observations de la durée T de l'oscillation, faites le disque plein étant en haut, est de 1°8′45, c'est à cette amplitude moyenne que j'ai réduit toutes les durées observées T′ d'une oscillation dans l'autre mode de suspension, en faisant usage de cette valeur de x. Il est évident, en effet, que si la valeur de γ varie avec l'amplitude, et si elle n'est pas la même dans les durées T et T′ observées à des amplitudes différentes, on pourra néanmoins regarder γ comme étant le même, si la durée T′ a été réduite à la valeur qu'elle aurait eue à

une amplitude égale à celle qui correspond à l'observation de T. Ces réductions à l'amplitude moyenne 1° 8^s,45 pour les différentes valeurs de T′ sont du reste très-faibles, et elles sont comprises en dedans des limites des erreurs accidentelles.

Il reste enfin à examiner l'influence que pourrait avoir une erreur dans la valeur adoptée du coefficient de dilatation de la tige du pendule, sur les écarts entre les durées d'une oscillation observées à différentes températures. Si l'on suppose que le coefficient de dilatation soit 0,00001878 + y, et si l'on détermine y par la condition de réduire à un minimum la somme des carrés des écarts pour les valeurs de T et de T′, observées à différentes températures, on trouve pour la valeur la plus probable de y + 0,00000129 ± 0,00000034.

Il paraît ainsi probable que le coefficient de dilatation de Lavoisier, avec lequel les réductions avaient été faites, est trop faible de près d'un quinzième de sa valeur, et que, par la comparaison des durées observées, il devrait être porté à 0,00002007 par degré centigrade. La correction qu'il faudrait apporter au coefficient de dilatation est à peu près quatre fois plus grande que son erreur probable, ce qui ne laisse guère de doute sur la nécessité d'augmenter la valeur primitivement adoptée.

Je donne dans le tableau suivant, pour chaque jour et pour chaque valeur de T et de T′, la correction qu'il faut appliquer à la durée observée, pour avoir la durée la plus probable, en tenant compte de la réduction à la distance moyenne entre les couteaux 248^l,48243; de la réduction à l'amplitude moyenne 1° 8′,45 pour les valeurs de T′, enfin de la correction sur le coefficient de dilatation du pendule; ces différentes corrections sont exprimées en unités de la septième décimale.

Date.	Disque plein en haut. Corrections			Disque plein en bas. Corrections			
	longueur du pendule.	coefficient de dilatation.	Durée corrigée T	longueur du pendule.	réduction à l'amplitude moyenne.	coefficient de dilatation.	Durée corrigée T′
			s				s
11 juin 1865	+33	−31	0,7515112	+33	−15	−30	0,7513564
» » »	+33	−31	0,7515049	+33	−14	−28	0,7513645
12 » »	+33	−18	0,7515084	+33	−13	−18	0,7513601
» » »	+33	−17	0,7515186	+33	−16	−17	0,7513645
26 octobre »	−35	+ 9	0,7515204	−35	−15	+ 9	0,7513503
» » »	−35	+ 9	0,7515055	−35	−22	+11	0,7513618
30 » »	−35	+13	0,7515039	−35	−13	+13	0,7513575
» » »	−35	+15	0,7514988	−35	−25	+16	0,7513607
13 novemb. »	+ 8	+42	0,7515012	+ 8	−32	+45	0,7513623
» » »	+ 8	+42	0,7515031	+ 8	+12	+44	0,7513742
17 » »	+ 8	+50	0,7515016	+ 8	+ 7	+50	0,7513702
» » »	+ 8	+50	0,7515001	+ 8	−39	+50	0,7513716
20 décemb. »	− 4	+67	0,7514957	− 4	−25	+68	0,7513648
» » »	− 4	+67	0,7515049	− 4	+11	+66	0,7513541
25 janvier 1866	− 4	+45	0,7514988	− 4	+12	+44	0,7513601
» » »	− 4	+46	0,7515092	+ 4	−42	+44	0,7513701
26 » »	− 4	+42	0,7515146	− 4	−24	+46	0,7513570
» » »	− 4	+43	0,7515164	− 4	+19	+44	0,7513674
Moy. 18 observat.			0,7515065				0,7513626.5

L'application des corrections indiquées dans ce tableau réduit à $\pm$ 0s,0000072 l'écart moyen d'une valeur de T comparée à la moyenne, et, par suite, à $\pm$ 0s,0000049 l'erreur probable sur une détermination de la durée d'une oscillation, lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité. Pour les valeurs de T′, l'écart moyen est très-légèrement augmenté par l'introduction de ces corrections, il devient $\pm$0s,0000064, et l'erreur probable d'une valeur de T′ est $\pm$ 0s,0000043. La somme des carrés des écarts pour les 18 valeurs de T et de T′ est réduite, par l'introduction de ces corrections, de 194444 à 158971, elle est par conséquent un peu diminuée, et les nouvelles valeurs de T et de T′ doivent être adoptées de préférence aux anciennes, comme étant plus probables; mais l'on doit conclure en

même temps que les écarts dans les premières valeurs de T et de T′ étaient dûs en grande partie à des erreurs accidentelles, ou à des causes autres que celles dont on a cherché à tenir compte, puisque les écarts ont été diminués dans une faible proportion seulement.

Si l'on veut attribuer uniquement à des erreurs accidentelles dans la détermination de l'intervalle de temps employé pour 2828 oscillations, les écarts entre les différentes valeurs de T ou de T′, on déduit de l'erreur probable sur la durée d'une oscillation, qui est en moyenne $\pm$ 0s,0000046 pour T et pour T′, $\pm$ 0s,0130 pour l'erreur probable de l'intervalle de temps compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations. Comme l'incertitude sur cet intervalle de temps, qui peut être attribuée aux erreurs fortuites dans l'observation des passages du pendule par la verticale, aux imperfections de l'enregistrement et à la transformation du temps chronographique en temps de la pendule normale, s'élève à $\pm$0s,0097, il suffit d'admettre l'existence d'une autre cause pouvant produire une erreur de $\pm$ 0s,00865 sur cet intervalle. Il est très-naturel de chercher cette cause dans une variation de l'erreur physiologique, et dans la manière de faire coïncider les passages du pendule avec le mouvement du doigt sur le levier-clef, dans deux observations faites à 35 $^1/_2$ minutes de distance. Si l'on suppose une variation de $\pm$ 0s,0061 dans l'erreur physiologique d'une observation à l'autre, il en résulte une erreur de $\pm$ 0s,00865 sur l'intervalle de temps compris entre ces deux observations.

Mais les écarts entre les différentes valeurs de T, ou de T′, peuvent provenir en partie d'une autre cause que des erreurs accidentelles d'observation; les forces troublantes, telles que frottement, poussée, remous, etc., dont il est tenu compte par l'introduction des termes $\frac{\gamma}{h}$ et $\frac{\gamma}{h'}$ dans les valeurs de T et de T′ ne restent pas absolument constantes d'un jour à l'autre, et il doit naturellement en résulter de petites différences dans la durée observée de l'oscillation. Nous verrons dans le chapitre suivant comment l'on peut évaluer, non dans chaque cas particulier, mais dans la moyenne d'un grand nombre de détermi-

nations, la part des écarts entre les valeurs de T, ou de T', qui provient d'une modification dans l'action des forces troublantes, et celle qui revient aux erreurs accidentelles d'observation.

CHAPITRE IV.

Calcul de la longueur du pendule simple faisant, dans le vide, une oscillation dans une seconde de temps moyen.

§ 9.

Il résulte des recherches de M. Cellérier, § 5 de son mémoire, que si on désigne par T la durée observée d'une oscillation, le pendule étant suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité, la distance de l'un à l'autre étant h; par T' la durée de l'oscillation, le pendule étant suspendu par l'autre couteau, dont la distance au centre de gravité est h'; par λ la distance entre les deux couteaux et par g la pesanteur, on a [1] :

$$T = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}\left(1 + \frac{\gamma}{h}\right)}; \quad T' = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}\left(1 + \frac{\gamma}{h'}\right)}$$

γ étant une quantité inconnue qui dépend du moment des forces troublantes et des imperfections de construction, qui ont pour effet que les deux couteaux ne sont pas rigoureusement des centres d'oscillation réciproques. Si on désigne par L la longueur du pendule simple faisant dans le vide une oscillation dans une seconde de temps moyen, on aura :

$$L = \frac{\lambda}{T^2}\left(1 + \frac{\gamma}{h}\right) = \frac{\lambda}{T'^2}\left(1 + \frac{\gamma}{h'}\right)$$

[1] Les durées T et T' sont déjà réduites à l'arc infiniment petit, par la formule qui donne cette réduction dans le vide pour chaque amplitude.

Si les durées observées T et T′ étaient mathématiquement exactes, et si la valeur de γ était rigoureusement la même pour les deux, et absolument constante d'un jour à l'autre, on devrait obtenir exactement la même valeur de L, qu'elle soit calculée par T, ou par T′, un jour quelconque.

En déterminant T et T′ par la moyenne d'un grand nombre d'observations, faites dans des circonstances différentes, on peut déduire la valeur moyenne de γ à l'aide de ces valeurs par la formule

$$\gamma = \frac{T - T'}{T} \cdot \frac{2\,hh'}{h' - h},$$

ou bien, si l'on désigne par IG la distance du centre de gravité au centre de figure du pendule, qui est égale à $\frac{h'-h}{2}$

$$\gamma = \frac{T - T'}{T} \cdot \frac{hh'}{IG}.$$

Supposons que la durée T de l'oscillation observée un jour quelconque soit affectée d'une erreur $\pm \varepsilon T$, et la durée T′ d'une erreur $\pm \varepsilon' T'$; que pour ce même jour la valeur exacte de γ soit $\gamma \pm \mu$, pour l'observation de T, et $\gamma \pm \mu'$, pour celle de T′, le calcul donnera pour la valeur de L, suivant qu'elle est déduite de T, ou de T′, et en mettant dans les seconds termes L à la place de $\frac{\lambda}{T^2}$ ou de $\frac{\lambda}{T'^2}$

$$L = \frac{\lambda}{T^2}\left(1 + \frac{\gamma}{h}\right) + L\left(\pm \frac{\mu}{h} \pm 2\varepsilon\right)$$

$$= \frac{\lambda}{T'^2}\left(1 + \frac{\gamma}{h'}\right) + L\left(\pm \frac{\mu'}{h'} \pm 2\varepsilon'\right)$$

On aurait des expressions analogues pour chaque jour d'observation, et pour la durée observée dans chaque mode de suspension du pendule. D'après la manière dont la valeur moyenne de γ a été déterminée, on obtient le même chiffre pour la valeur moyenne de L, en prenant la moyenne arithmétique de tous les résultats obtenus avec les différentes valeurs de T, le pendule étant suspendu par le couteau le plus rappro-

ché du centre de gravité, ou par la moyenne arithmétique de tous les résultats obtenus avec les différentes valeurs de T′, le pendule étant suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité. On a par conséquent :

$$\Sigma \,.\, \mathrm{L}\left(\pm \frac{\mu}{h} \pm 2\varepsilon\right) = 0$$

$$\Sigma \,.\, \mathrm{L}\left(\pm \frac{\mu'}{h'} \pm 2\varepsilon'\right) = 0$$

On peut considérer ainsi la différence entre chaque valeur individuelle de L et la moyenne, comme l'écart produit, soit par l'erreur accidentelle dans l'observation de la durée, soit par la différence de la valeur de γ au moment de l'observation avec sa valeur moyenne. Si, dans chaque cas spécial, il est impossible de faire la part de chacune de ces causes d'erreur dans l'écart observé, on peut du moins déterminer la valeur moyenne de l'une et de l'autre. Désignons par $\pm$ M la valeur moyenne de $\pm\mu$, et par $\pm$ ET la valeur moyenne des erreurs accidentelles dans l'observation de la durée (il n'y a effectivement pas de raison pour supposer que ces valeurs moyennes soient différentes dans les deux modes de suspension, par l'un des couteaux, ou par l'autre); on aura

$$\pm \Delta = \mathrm{L}\left(\pm \frac{\mathrm{M}}{h} \pm 2\,\mathrm{E}\right)$$

$$\pm \Delta' = \mathrm{L}\left(\pm \frac{\mathrm{M}}{h'} \pm 2\,\mathrm{E}\right)$$

Dans ces formules, $\pm\,\Delta$ représente l'écart moyen entre une valeur de L et la moyenne, le pendule étant suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité, et $\pm\,\Delta'$ l'écart moyen entre une valeur de L et la moyenne, le pendule étant suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité. Les valeurs de $\pm\,\Delta$ et $\pm\,\Delta'$ sont calculées par les formules :

$$\Delta = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\,.\,\delta^2}{n-1}} \qquad \Delta' = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\,.\,\delta'^2}{n-1}}$$

δ étant un écart dans le premier mode de suspension, δ' dans le second, et n le nombre d'observations faites dans l'un et dans l'autre.

Des relations précédentes on tire :

$$2\,\mathrm{E} = \pm \frac{1}{\mathrm{L}} \sqrt{\frac{h'^2 \Delta'^2 - h^2 \Delta^2}{h'^2 - h^2}}$$

et

$$\mathrm{M} = \pm \sqrt{\frac{h^2 \Delta^2}{\mathrm{L}^2} - 4\,\mathrm{E}^2 h^2} = \pm \sqrt{\frac{h'^2 \Delta'^2}{\mathrm{L}'^2} - 4\,\mathrm{E}^2 h'^2}.$$

L'application des formules précédentes donne pour la seconde série d'expériences, en prenant les valeurs moyennes de T et de T′ de la page 98.

$$\frac{T-T'}{T} = 0{,}0001914.$$

Nous avons vu à la page 94 que la valeur moyenne de la distance λ entre les couteaux, pour les observations faites du 11 juin 1865 au 26 janvier 1866, était $248^{\mathrm{l}}{,}48243$, et les durées T et T′ sont déjà réduites à cette valeur moyenne. D'après le § 4, on a

$$\mathrm{IG} = 37^{\mathrm{l}}{,}464\,;\ h = 86^{\mathrm{l}}{,}776 \text{ et } h'\ 161^{\mathrm{l}}{,}704,$$

d'où l'on tire pour la valeur moyenne de γ

$$\gamma = 0{,}071695$$

et par suite

$$1 + \frac{\gamma}{h} = 1{,}00082621$$

$$1 + \frac{\gamma}{h'} = 1{,}00044337$$

Voici maintenant, pour les différents jours, la valeur obtenue pour la longueur L du pendule effectuant, dans le vide, une oscillation dans une seconde de temps moyen. La première colonne donne le résultat du calcul fait avec une valeur de T, et la seconde avec une valeur de T′.

Date.		Valeurs de L.	
		Calcul par T, le disque plein étant en haut.	Calcul par T′, le disque plein étant en bas.
11 juin 1865	R E	$440^l,3351$	$440^l,3482$
» » »	R O	,3426	,3387
12 » »	R E	,3385	,3438
» » »	R O	,3266	,3387
26 octobre »	R E	,3246	,3552
» » »	R O	,3419	,3418
30 » »	R E	,3438	,3469
» » »	R O	,3497	,3431
13 novembre »	R E	,3469	,3413
» » »	R O	,3447	,3273
17 » »	R E	,3465	,3319
» » »	R O	,3481	,3303
20 décembre »	R E	,3534	,3383
» » »	R O	,3426	,3508
25 janvier 1866	R E	,3497	,3438
» » »	R O	,3376	,3318
26 » »	R E	,3313	,3475
» » »	R O	,3291	,3352
Moyenne		440,3407	440,3408

On tire des valeurs obtenues, lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché du centre de gravité, $\Delta = \pm\, 0^l,00845$, et lorsque le pendule est suspendu par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, $\Delta' = \pm\, 0^l,00755$.

Il résulte, par conséquent, des formules données plus haut que

$$2\,E = \pm\, 0,00001625$$
$$\text{et } M = \pm\, 0,0008866$$

Ainsi, par suite de circonstances variables d'un jour à l'autre, ou d'une observation à l'autre, la quantité γ n'est pas constante, mais elle varie entre des limites qui s'élèvent, en moyenne, à la quatre-vingtième partie de sa valeur environ. Les circonstances relatives à l'amplitude, à la densité de l'air, etc., dans lesquelles la valeur moyenne de γ a été obtenue, dans cette série d'expériences, sont : une amplitude de 1°8′; une pression

atmosphérique de 732^{mm}; une température de $+ 11^{o},1$. Par suite d'une variation dans ces circonstances, la valeur de γ pour une observation quelconque de cette série peut être représentée par

$$\gamma = 0{,}071695 \pm 0{,}0008866,$$

et l'erreur sur la détermination de la valeur moyenne de γ est égale à $\pm$ 0,0001478. L'écart qui résultera, sur une détermination de L, d'une même variation $\pm \mu$ dans la valeur de γ, ne sera pas le même, suivant que le pendule est suspendu par le couteau le plus rapproché, ou par le couteau le plus éloigné du centre de gravité, puisque d'après les formules de la page 102, μ est divisé par h dans le premier cas, et par h' dans le second. La formule qui représente l'écart moyen dans le premier cas est :

$$\pm \Delta = 440^{l},34\,(\pm 0{,}00001022 \pm 0{,}00001625) = \pm 0^{l},00845$$

et dans le second :

$$\pm \Delta' = 440^{l},34\,(\pm 0{,}00000548 \pm 0{,}00001625) = \pm 0^{l},00755.$$

Il résulte, par conséquent, de la comparaison des écarts entre les différentes valeurs obtenues pour L, suivant que le pendule est suspendu par l'un, ou par l'autre des couteaux, que ces écarts sont dus en très-grande partie aux erreurs accidentelles dans la détermination de la durée de l'oscillation. En effet, le terme qui représente la part de l'écart due à une variation sur la valeur de γ est, dans le premier cas, un peu moins des deux tiers, et dans le second cas, le tiers de celui qui représente la part due aux erreurs dans la durée de l'oscillation.

De la valeur de 2 E obtenue plus haut, on déduit $\pm 0^{s},0000061$ pour l'erreur moyenne dont est affectée la durée d'une oscillation dans les deux modes de suspension du pendule, et qui provient des erreurs fortuites dans l'observation des passages, des imperfections dans l'enregistrement et des erreurs dans la transformation du temps, enfin de la variation physiologique entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations. L'erreur probable sur la durée observée d'une oscillation

est de $\pm 0^s,0000041$, ce qui donne $\pm 0^s,0116$ pour l'erreur probable sur l'intervalle de temps employé pour 2828 oscillations. Or, on a vu par les tableaux pages 88 et 89, que l'erreur probable sur l'intervalle de temps qui provient des erreurs fortuites dans l'observation des passages et des imperfections dans l'enregistrement chronographique, s'élève en moyenne à $\pm 0^s,0097$; la part qu'il faut attribuer à une variation physiologique dans la manière de donner les signaux, entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations, est donc de $\pm 0^s,0064$, ce qui suppose une variation de $\pm 0^s,0045$ dans l'erreur physiologique d'une observation à l'autre. Ces chiffres sont naturellement un peu plus faibles que ceux que nous avions trouvés à la page 99, et qui avaient été obtenus sans tenir compte de la différence dans la durée de l'oscillation qui provient des variations de γ.

L'instant du commencement d'une série d'oscillations serait ainsi affecté d'une erreur probable $\pm 0^s,0082$, qui serait due, en moyenne pour la part indiquée ci-dessous, aux causes suivantes :

Erreurs fortuites dans l'observation des passages....................	$\pm 0^s,0016$
Erreurs d'enregistrement et de transformation du temps chronographique.	$\pm 0^s,0067$
Erreur physiologique dans la manière de donner les signaux..........	$\pm 0^s,0045$

L'instant de la fin de cette série d'oscillations serait affecté d'une erreur égale pour les mêmes causes, ce qui donne lieu à l'erreur probable $\pm 0^s,0116$ sur l'intervalle de temps compris entre le commencement et la fin d'une série d'oscillations.

Je ne mentionnerai qu'en passant les résultats qui pourraient être déduits, pour la valeur de L, de la première série d'expériences ; il résulte en effet des chiffres donnés à la page 91 que, dans cette première série, l'erreur sur la durée d'une oscillation est près de six fois plus grande que dans la seconde série. La moyenne des 23 déterminations de T ou de T', dans la première série, est ainsi affectée d'une erreur qui dépasse notablement celle qui peut être attribuée à une seule détermination de T ou de T', dans la seconde série. On trouverait avec les valeurs indi-

quées plus haut L = 440^l,3253 pour le résultat de cette première série d'expériences, mais le poids, qui peut être attribué à cette détermination, est trop faible pour qu'on puisse la faire entrer en ligne de compte dans le résultat définitif.

§ 10.

Détermination de la valeur de la pesanteur à Genève.

La moyenne des 36 déterminations de L, page 104, donne L = 440^l,34075, avec une erreur moyenne de ± 0^l,0013, d'après la somme des carrés de tous les écarts; l'erreur probable est de ±0^l,0009. On a ainsi en mesure métrique, pour la longueur du pendule simple, faisant à Genève une oscillation dans le vide dans une seconde de temps moyen,

0^m,9933334 avec une erreur probable de ±0^m,0000020.

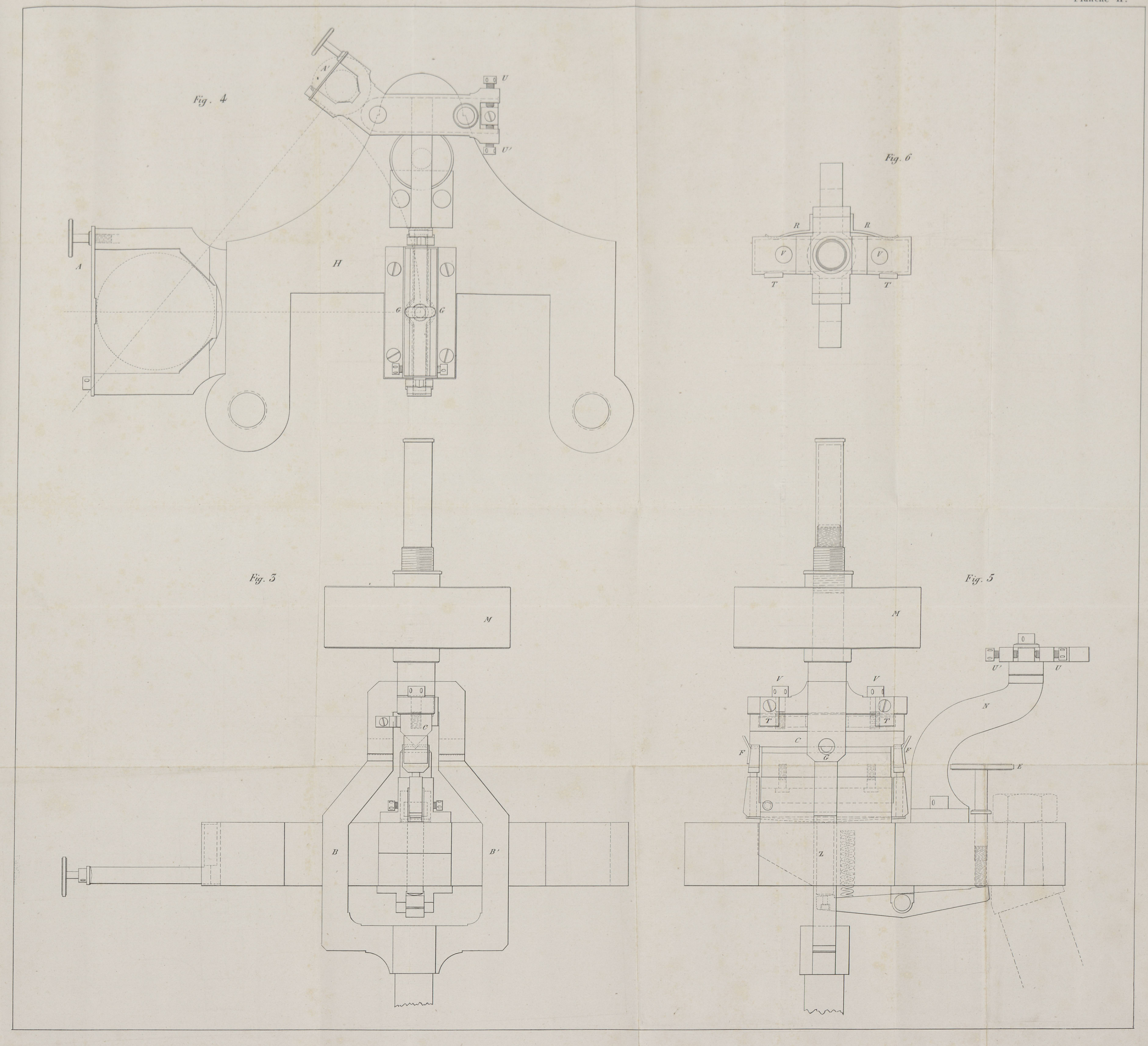
On déduit de là pour la pesanteur à Genève, à la latitude de 46°12′, et à une hauteur de 408 mètres au-dessus du niveau de la mer,

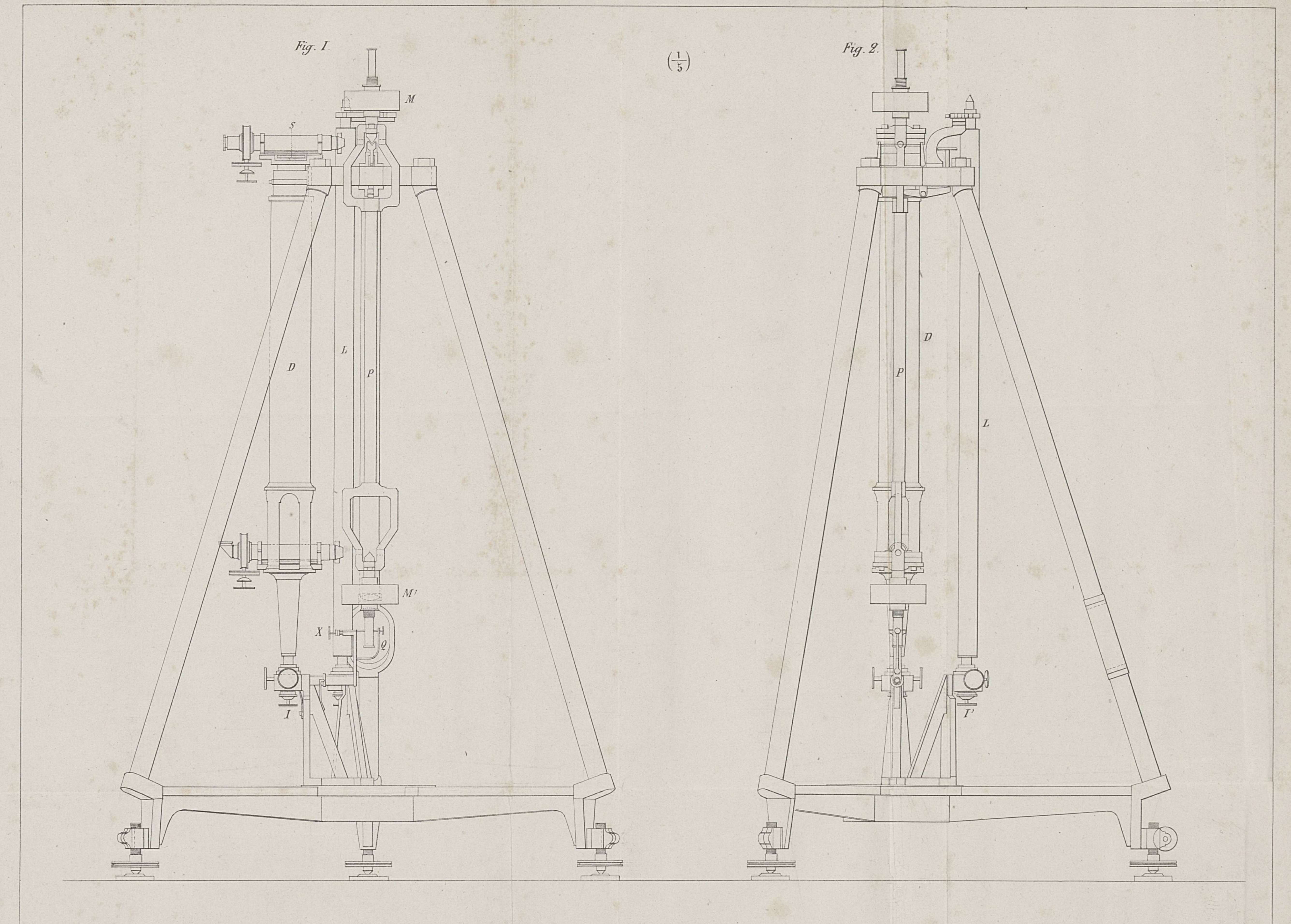
g = 9^m,803808 avec une erreur probable de ± 0^m,000020.

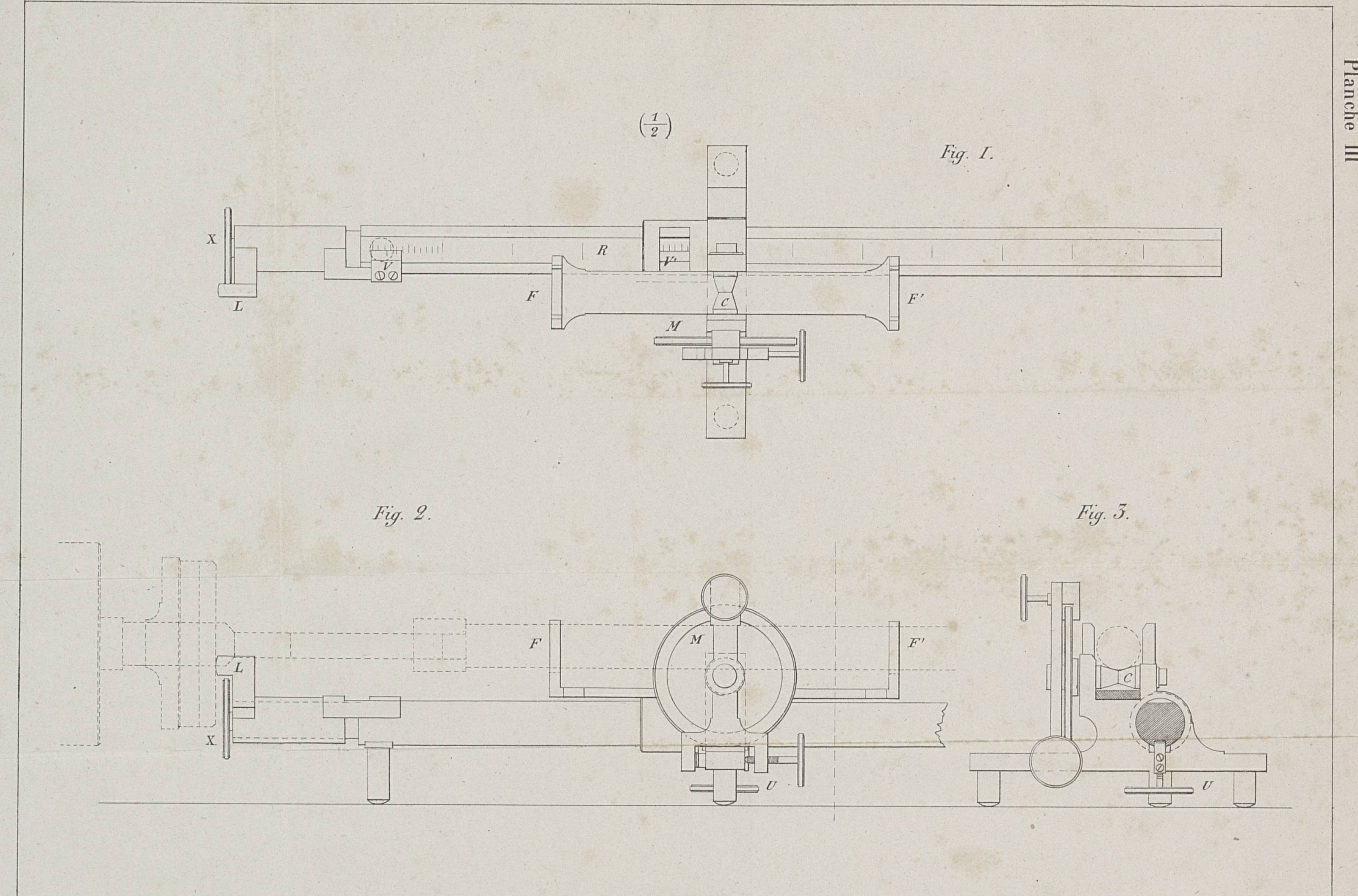
Toutefois, pour les motifs exposés dans l'introduction, ce résultat ne peut être regardé que comme provisoire, et il peut être susceptible de quelques modifications, lorsque des comparaisons avec un étalon authentique auront fait connaître la correction qui doit être apportée à l'échelle, et lorsque des expériences directes auront donné la valeur exacte du coefficient de dilatation de l'échelle et de la tige du pendule.

TABLE DES MATIÈRES.

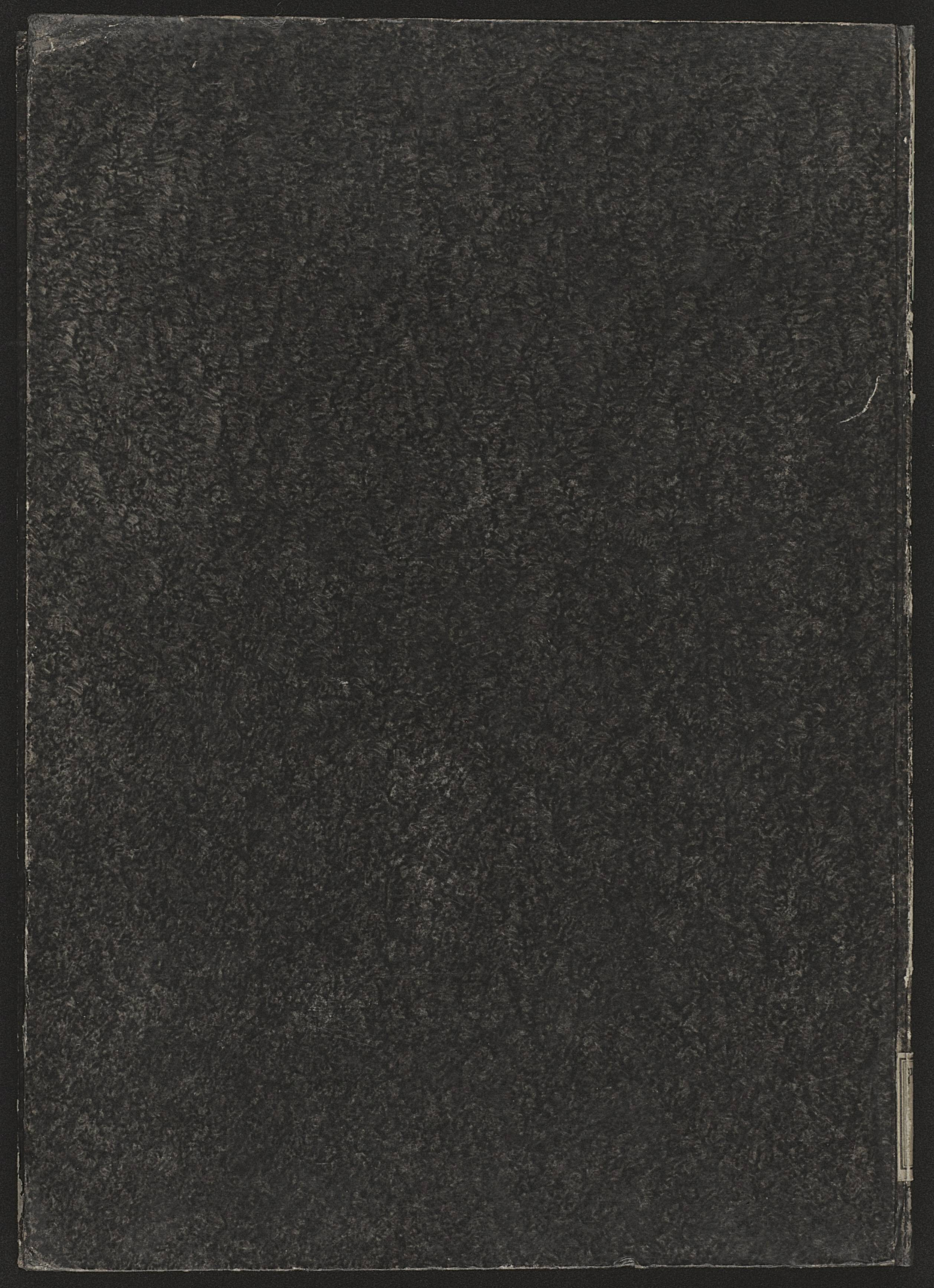
	Pages
Introduction	1
Chapitre I. **Description des appareils**	10
§ 1. Pendule à réversion	10
§ 2. Appareil pour déterminer la position du centre de gravité	16
Chapitre II. **Des mesures**	18
§ 3. Mesures de la distance des couteaux	18
§ 4. Détermination de la position du centre de gravité du pendule	47
Chapitre III. **Détermination de la durée d'une oscillation**	49
§ 5. Comparaisons de la pendule chronographique et de la pendule sidérale Dent	50
§ 6. Marche de la pendule normale Dent	68
§ 7. Observations des oscillations du pendule	70
§ 8. Réduction des observations des oscillations	78
Chapitre IV. **Calcul de la longueur du pendule simple faisant à Genève, dans le vide, une oscillation dans une seconde de temps moyen**	100
§ 9.	100
§ 10. Détermination de la valeur de la pesanteur à Genève	107


Fig. 4
A'
U
U'
A
H
G
G
Fig. 6
R
R
V
V
T
T
Fig. 3
M
C
B
B'
Fig. 5
M
V
V
U'
U
T'
T'
N
C
F
F
G
E
Z


Fig. I
Fig. 2.
(1/5)
M
S
D
L
P
M'
X
Q
I
D
P
L
I'



(1/2)
Fig. 1.
X
L
V
R
V'
C
F
F'
M
Fig. 2.
F
M
F'
L
X
U
Fig. 3.
C
U



Plantamour

Pendule à reversion I



inches 4 3 2 1 0 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams